EMELTSZINTŰ MATEMATIKA ÉRETTSÉGI FELADATOK OSZTÁLYOZÁSA

Abszolutértékes egyenlet

0710/1a

1.

a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x^2 = |x-6|$$

1505/01b

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin x - \cos^2 x = -1$

b) $\big|x-|x|\big| = 2x+1$

1605/05a

5. Oldja meg **a [4; 6] alaphalmazon** az alábbi egyenleteket, illetve egyenlőtlenséget!

a) $\big|5-|x|\big| = 3$

Abszolutértékes egyenlőtlenség

1305/01

1. Jelölje A az $\frac{x+4}{x-3} \le 0$ egyenlőtlenség **egész** megoldásainak a halmazát, B pedig az $|x+3| < 4$ egyenlőtlenség **egész** megoldásainak a halmazát.
Elemei felsorolásával adja meg az $A \cap B$, az $A \setminus B$ és az $A \cup B$ halmazt!

Algebra

1805/2b

b) Legyen $f(x) = x^2 - 11x + 30$.
Igazolja, hogy ha $f(x) \neq 0$, akkor $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x-4}{x-6}$.

Arányosság

2305/02a

2. Európában az autók üzemanyag-fogyasztását $\frac{\text{liter}}{100\,\text{km}}$ mértékegységben szokás megadni. (Például a 8 $\frac{\text{liter}}{100\,\text{km}}$ azt jelenti, hogy az autó 100 kilométerenként átlagosan 8 liter üzemanyagot fogyaszt.)

Az Egyesült Államokban viszont $\frac{\text{mérföld}}{\text{gallon}}$ mértékegységben adják meg a fogyasztást. (Például a 20 $\frac{\text{mérföld}}{\text{gallon}}$ azt jelenti, hogy 1 gallon üzemanyaggal átlagosan 20 mérföldet tudunk megtenni.)

Az Egyesült Államokban a 2020-ban gyártott autók átlagfogyasztása 25,4 $\frac{\text{mérföld}}{\text{gallon}}$ volt.

a) Fejezze ki ezt a fogyasztást $\frac{\text{liter}}{100\,\text{km}}$-ben! Válaszát 1 tizedesjegyre kerekítve adja meg! (1 gallon ≈ 3,79 liter, és 1 mérföld ≈ 1,61 km.)

Aritmetika

0705/1

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\frac{x^2-10x-24}{x^2-x-6}=\sin\frac{\pi}{2}-\lg 1+2^{\log_2 9}.$$

Differenciálszámítás

0705/4b

b) Adja meg az $y=x^2-8x+11$ egyenlettel megadott alakzat $P(5;-4)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét!

0805/6b

b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x)=x^3-9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját!

0805/6a

6.

a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl.)
Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x = 1$ lokális szélsőérték-helye a függvénynek!
Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x = 1$ a függvénynek lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye!
Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték-helye is!

0910/9

9. Jancsi vázát készít. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gömbből levágott m magasságú ($m > 10$) gömbszelet határoló köréhez egy szintén m magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszeletet határoló kör sugarával.
Mekkorának válassza Jancsi a gömbszelet m magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő formájú üreges fatalpra fogják állítani.)

Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága m, a határoló kör sugara pedig r, akkor a térfogata: $V = \frac{\pi}{6} m \cdot (3r^2 + m^2)$.

1205/04

4. Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p-3)x^2 + p^2x - 6$.

a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)\,dx$ határozott integrál értékét, ha $p = 3$.

b) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az $x = 1$ zérushelye legyen az f függvénynek!

c) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen!

1205/07

7. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a (2; 6) pontra. Tudjuk, hogy $a < 0$. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját P, az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki ezt a területet (O a koordináta-rendszer origóját jelöli)!

1405/04a

4. **a)** Deriváltfüggvényének segítségével elemezze az f:]–2; 3[→ **R**; $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x$ függvényt a következő szempontok szerint: növekedés és fogyás, lokális szélsőértékek helye és értéke!

1410/04b

4. Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe.

a) Igazolja, hogy ha $x \in]0;3[$, akkor $y > 0$.

b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordináta)

1510/07ab

7. Adott az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = x^4 + 8x^3 - 270x^2 + 275$ függvény.

a) Igazolja, hogy $x = -15$-ben abszolút minimuma, $x = 0$-ban lokális maximuma, $x = 9$-ben lokális minimuma van a függvénynek!

b) Igazolja, hogy f konkáv a $]-9; 5[$ intervallumon!

1705/4b

4. Az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 12x + 27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét!

b) Írja fel a parabolához az $E(5; -8)$ pontjában húzott érintő egyenletét!

1710/4c

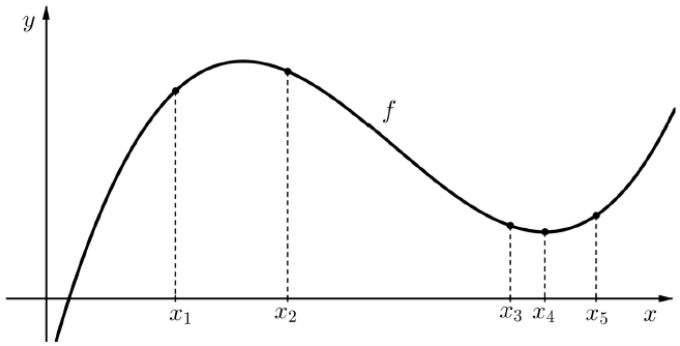
c) Határozza meg az $f:]-4; -1[\to \mathbf{R}$, $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x + 20$ függvény minimumhelyét és a minimális függvényértéket!

1810/09b

b) Határozza meg az a, b, c valós paraméterek értékét úgy, hogy az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 28$ ($x \in \mathbf{R}$) függvénynek $x = 2$-ben zérushelye, $x = -4$-ben lokális maximumhelye, $x = -1$-ben pedig inflexiós pontja legyen!

1910/04

4. **a)** Az ábrán a harmadfokú f függvény grafikonjának egy részlete látható. A függvény értelmezési tartományában megjelöltünk öt helyet.
Mindegyik esetben döntse el, hogy az adott helyen az f első, illetve második deriváltjának előjele pozitív (P) vagy negatív (N)! Válaszát írja a megadott táblázat megfelelő cellájába! (Tudjuk, hogy $f'(x_4) = 0$.)



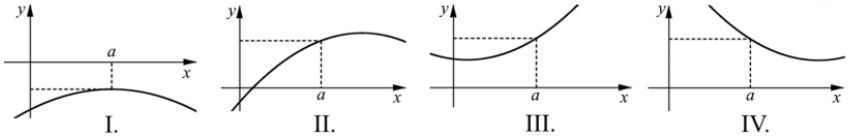
hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	P			0	
f'' előjele					

b) Adott az $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 8$ egyenletű parabola.

Határozza meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $4x - y = k$ egyenletű egyenes érintse a parabolát, és határozza meg az érintési pont koordinátáit is!

4. Adott a valós számok halmazán értelmezett másodfokú f függvény. Ismert, hogy egy adott $a \in \mathbf{R}$ helyen $f(a) > 0$, $f'(a) > 0$ és $f''(a) > 0$ mindegyike teljesül.

a) Az alábbi ábrákon négy másodfokú függvény grafikonja látható. Ezek alapján töltse ki a táblázat üres mezőit aszerint, hogy a megfelelő kijelentés *igaz* vagy *hamis*, majd döntse el, hogy a négy grafikon közül melyik lehet az f függvényé!
(Válaszait itt nem kell indokolnia.)



I. II. III. IV.

függvény-grafikon	az a helyen a függvényérték pozitív	az a helyen az első derivált értéke pozitív	az a helyen a második derivált értéke pozitív
I.		*hamis*	
II.			
III.			
IV.			

Az f függvény grafikonja a(z) …… grafikon lehet.

b) A másodfokú g függvény értékét az $x \in \mathbf{R}$ helyen a $g(x) = px^2 + qx + r$ összefüggés adja meg ($p, q, r \in \mathbf{R}$, $p \neq 0$). Határozza meg p, q és r értékét úgy, hogy $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$ és $g''(1) = 4$ teljesüljön!

Elsőfokú egyenlet

1710/2a

2. **a)** Határozza meg $\frac{x}{y}$ értékét, ha $\frac{2x+3y}{4x+2y} = \frac{9}{10}$ $(y \neq 0, y \neq -2x)$.

Elsőfokú egyenlőtlenségek

0810/6a,b

6. Egy középiskola 12. osztályának egyik csoportjában minden tanuló olyan matematika dolgozatot írt, amelyben 100 pont volt az elérhető maximális pontszám. A csoport eredményéről a következőket tudjuk: 5 tanuló maximális pontot kapott a dolgozatára, minden tanuló elért legalább 60 pontot, és a dolgozatok pontátlaga 76 pont volt. Minden tanuló egész pontszámmal értékelt dolgozatot írt.

a) Legalább hányan lehettek a csoportban?

b) Legfeljebb hány diák dolgozata lehetett 60 pontos, ha a csoport létszáma 14?

Elsőfokú egyenletrendszer

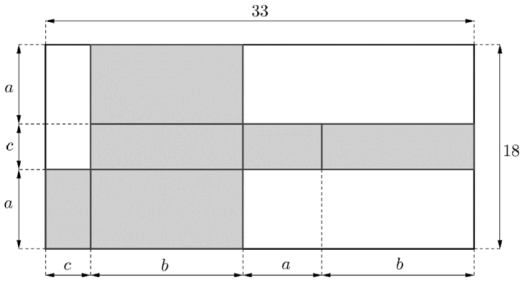
0810/2

2. A mosogatógépünkön háromféle program van. Egy mosogatáshoz az *A* program 20%-kal több elektromos energiát, viszont 10%-kal kevesebb vizet használ, mint a *B* program.
A *B* program 30%-kal kevesebb elektromos energiát és 25%-kal több vizet használ egy mosogatáshoz, mint a *C* program.
Mindhárom program futtatásakor 40 Ft-ba kerül az alkalmazott mosogatószer.
Egy mosogatás az *A* programmal 151 Ft-ba, a *B* programmal 140 Ft-ba kerül.

Mennyibe kerül a *C* programmal egy mosogatás?

1905/05a

5. Egy 33×18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az *ábra* szerint választják meg.



a) Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7$ cm!

1910/03a

3. A p, q, r pozitív számok összege 180. Tudjuk továbbá, hogy $p : q = 7 : 8$ és $r : p = 5 : 3$.

a) Határozza meg ezeket a számokat!

2205/05a

5. Lali, Pali és Vali egy palacsintázóban ebédelnek. Lali 3 mogyorókrémes, 1 túrós és 2 fahéjas palacsintáért 1500 Ft-ot, Pali 4 mogyorókrémes, 2 túrós és 1 fahéjas palacsintáért 1740 Ft-ot, Vali pedig 1 mogyorókrémes, 2 túrós és 2 fahéjas palacsintáért 1170 Ft-ot fizetett.

a) Mennyibe kerül 1-1 darab a különböző fajta palacsintákból?

2210/09a

9. Egy jótékonysági rendezvényen sorsjegyeket árulnak. 5 kék és 3 zöld sorsjegy 6700 Ft-ba, 3 kék és 2 zöld sorsjegy 4200 Ft-ba kerül.

a) Mennyibe kerül külön-külön egy kék, illetve egy zöld sorsjegy?

Exponenciális egyenlet:

0610/1b

b) $2^x = 3^{2x+1}$

1310/01b

b) $2^{2(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}} \qquad (x \neq -4)$

1405/05c

c) Mutassa meg, hogy a $2 \cdot 8^x + 7 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x = 0$ egyenletnek nincs valós gyöke!

1410/01b

b) $25^{\lg x} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg x}$

1810/02a

2. **a)** Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 50 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} + 30 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} = 81$$

1905/03a

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} + \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 324$

2010/06ab

6. Egyes kutatók szerint a városokban az influenzával fertőzött betegek száma a $B(t) = \dfrac{L}{1 + \left(\dfrac{L}{B_0} - 1\right) \cdot 0{,}75^t}$ formula szerint alakul. A képletben t az influenzajárvány kezdetétől eltelt idő napokban kifejezve ($0 \leq t < 30$), L a város lakosainak száma, B_0 pedig a járvány kezdetekor a fertőzött betegek száma a városban ($0 < B_0 < L$).
Egy nagyvárosban $L = 1{,}5$ millió, $B_0 = 1000$.

a) A modell szerint hány fertőzött betegre lehet számítani ebben a városban a járvány kezdete után 5 nappal?

b) Hány nap múlva lesz a város lakosainak 10%-a fertőzött beteg a modell szerint?

2105/03b

Van két, most induló hosszú távú befektetésünk is. Az egyiknél 500 000 forint a befektetett összeg, amely havi 1%-os kamatos kamattal növekszik. A másik – magasabb hozamú, de kockázatosabb – üzletbe 450 000 forintot fektettünk; ez az összeg havi 1,3%-os kamatos kamattal növekszik.

b) Hányadik hónap végén lesz először több pénz a második befektetésünkben, ha a kamatfeltételek közben nem változnak?

2110/01a

1. **a)** Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$(2^x - 3)^2 = 2^{x+1} + 9$

2205/01a

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $9^{x+1} + 15 \cdot 3^x = 6$

2310/01b

b) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$3 \cdot 9^x - 3^{x+3} = 3^x - 9$

2405/01b

Adott az f és a g függvény:
$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = 2^{x-3}$
$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = 2^x - 7$

b) A két függvény grafikonját egy számítógépes programmal közös koordináta-rendszerben ábrázoltuk. Határozza meg a két grafikon metszéspontjának koordinátáit!

Exponenciális egyenlőtlenség

0810/3

3. Jelölje H a $[0; 2\pi[$ intervallumot. Legyen A a H azon x elemeinek halmaza, amelyekre teljesül a $2^{\sin x} > 1$ egyenlőtlenség, és B a H halmaz azon részhalmaza, amelynek x elemeire teljesül a $2^{\cos x} < 1$ egyenlőtlenség.

Adja meg az A halmazt, a B halmazt és az $A \setminus B$ halmazt!

2110/01bc

Legyen $f(x)=x^2-9x+14$, ahol x valós szám.
Tekintsük a következő állítást: „Ha $x > 7$, akkor $f(x) > 0$.”

b) Adja meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Igaz-e az állítás megfordítása? Válaszát indokolja!

Függvények

0505/4ab

4. **a)** Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett, $x \mapsto \frac{1}{2}|x-4|+3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!

b) Állapítsa meg a függvény értékkészletét!

0510/4

4. **a)** Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az

$$f:[0;7]\to R,\ f(x)=|x^2-6x+5|$$

függvényt!

b) Adja meg az f függvény értékkészletét!

c) A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az

$$|x^2-6x+5|=p$$

egyenletnek a $[0;7]$ intervallumon?

0605/2

2. Legyen adott az $f:[-2{,}5\,;2{,}5]\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3-3x$ függvény.

a) Határozza meg az f függvény zérushelyeit!

b) Vizsgálja meg az f függvényt monotonitás szempontjából!

c) Adja meg az f függvény legnagyobb és legkisebb értékét!

0605/8

8.

a) Ábrázolja függvény-transzformációk segítségével a [–3; 4] intervallumon az $x \mapsto x^2 - 2|x| - 3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!

b) Legyen az f, g és h függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési szabályuk: $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $g(x) = x - 3$; $h(x) = |x|$.

Képezzünk egyszeresen összetett függvényeket a szokásos módon. Például

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 - 2x - 3) - 3 = x^2 - 2x - 6.$$

Készítse el – a fenti példának megfelelően – az f, g és h függvényekből pontosan két különböző felhasználásával képezhető egyszeresen összetett függvényeket!
Sorolja fel valamennyit!
(A $(g \circ f)(x)$ függvényt nem szükséges újra felírni.)

c) Keressen példát olyan p és t, a valós számok halmazán értelmezett függvényre, amelyre
$(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x)$!
Adja meg a p és a t függvény hozzárendelési szabályát!

0610/6

6. Egy arborétumban 1969 óta figyelik a fák természetes növekedését. Úgy tapasztalták, hogy a mandzsu fűzfa magasságát közelítően jól írja le az

$$m(t) = 12 - \frac{10}{t+1} \text{ képlet;}$$

a hegyi mamutfenyő magasságát közelítően jól írja le a következő formula:

$$h(t) = 5 \cdot \sqrt{0{,}4t + 1} + 0{,}4.$$

Mindkét formulában t az 1969 óta eltelt időt jelöli években $(t \geq 1)$, és a magasságot méterben számolják.

a) Szemléltesse a mandzsu fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változását, olyan közös oszlopdiagramon, amely a magasság értékeket az 1970 és 2000 közötti időszakban 10 évenként mutatja! A diagramon tüntesse fel a számított magasságértékeket!

b) A mamutfenyő melyik évben érte el 10,5 méteres magasságot?

c) Indokolja, hogy nem lehet olyan fa az arborétumban, amelynek magasságát a $g(t) = t^3 - 16{,}5t^2 + 72t + 60$ képlet írja le! (A magasságot centiméterben számolják, t az 1985 óta eltelt időt jelöli években, és $t \leq 21$.)

0705/4a

4. **a)** Ábrázolja a [0; 6] intervallumon értelmezett $x \mapsto x^2 - 8x + 11$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!

0705/5abc

5. **a)** Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\sqrt{x^2-6x+9}$ kifejezés értelmezhető!

b) Ábrázolja a [–5; 8] intervallumon értelmezett $f: x \mapsto \sqrt{x^2-6x+9}$ függvényt!

c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti *f* függvényre vonatkozóan? Válaszát írja a sor végén levő téglalapba! (Az indoklást nem kell leírnia.)

A: Az *f* értékkészlete: [0; 5].

B: Az *f* függvény minimumát az $x = -3$ helyen veszi fel.

C: Az *f* függvény szigorúan monoton nő a [4; 8] intervallumon.

A	
B	
C	

0710/6

6. Adott az *f* függvény: $f:]-1; 6[\to \mathbf{R}$; $f(x) = -4x^3 + 192x$.

a) Határozza meg *f* zérushelyeit, és elemezze az *f* függvényt monotonitás szempontjából!

Jelölje *c* az *f* értelmezési tartományának egy pozitív elemét.

b) Határozza meg a *c* értékét úgy, hogy az *x* tengely $[0; c]$ szakasza, az $x - c = 0$ egyenletű egyenes és az *f* grafikonja által közbezárt síkidom területe 704 területegységnyi legyen!

0710/7

7. A csonkakúp alakú tárgyak térfogatát régebben a gyakorlat számára elegendően pontos közelítő számítással határozták meg. Eszerint a csonkakúp térfogata közelítőleg egy olyan henger térfogatával egyezik meg, amelynek átmérője akkora, mint a csonkakúp alsó és felső átmérőjének számtani közepe, magassága pedig akkora, mint a csonkakúp magassága.

a) Egy csonkakúp alakú fatörzs hossza (vagyis a csonkakúp magassága) 2 m, alsó átmérője 12 cm, felső átmérője 8 cm. A közelítő számítással kapott térfogat hány százalékkal tér el a pontos térfogattól? (Ezt nevezzük a közelítő számítás relatív hibájának.)

b) Igazolja, hogy a csonkakúp térfogatára – a fentiekben leírt útmutatás alapján kapott – közelítő érték sohasem nagyobb, mint a csonkakúp térfogatának pontos értéke!

Jelölje x a csonkakúp két alapköre sugarának arányát, és legyen $x > 1$. Bizonyítható, hogy a fentiekben leírt, közelítő számítás relatív hibáját százalékban mérve a következő függvény adja meg: $f:]1; +\infty[\to \mathbf{R}$; $f(x) = 25 \cdot \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$

c) Igazolja, hogy *f*-nek nincs szélsőértéke!

0905/4a

4. Legyen f és g is a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x)=\begin{cases} -1, & \text{ha } x\le -1 \\ 2x+1, & \text{ha } -1<x<0 \\ 1, & \text{ha } x\ge 0 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad g(x)=x^2-2\,.$$

a) Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben mindkét függvényt! Adja meg az $f(x)=g(x)$ egyenlet valós megoldásait!

1005/1

1. Adott az f és a g függvény.

f: $D_f=\mathbf{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2};\ k\in Z\right\}$ $\qquad x\mapsto(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\cdot\sin 2x\,.$

a) Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans!

g: $D_g=[-7;7]$ $\qquad x\mapsto x^2-6|x|\,.$

b) Számítsa ki a g függvény zérushelyeit!

c) Adja meg a g függvény értékkészletét!

1010/1b

b) Az alábbi f és g függvényt is a $[-3;6]$ intervallumon értelmezzük.

$f(x)=\sqrt{x+3}$ és $g(x)=-0{,}5x+2{,}5\,.$

Ábrázolja közös koordinátarendszerben az f és a g függvényt a $[-3;6]$ intervallumon!

Igazolja számolással, hogy a két grafikon metszéspontjának mindkét koordinátája egész szám!

1105/7

7. A nyomda egy plakátot 14 400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül el. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40 000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.

a) Mennyi a nyomólemezek árának és a nyomtatásra fordított munkaórák miatt fellépő költségnek az összege, ha a 14 400 plakát kinyomtatásához 16 nyomólemezt használnak?

b) A 14 400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege?

1110/8

8. **a)** Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben az

$$f:[0;5]\to\mathbf{R},\ f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$$ függvényt!

b) Tekintsük az $|(x-2)^2-1|=k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében!

c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k\in]-6;6[$ intervallumon!

d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét!

4. Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x)=-3x^3+(p-3)x^2+p^2x-6$.

a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)\,dx$ határozott integrál értékét, ha $p=3$.

b) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az $x=1$ zérushelye legyen az f függvénynek!

c) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x=1$ helyen pozitív legyen!

1205/04

1210/03

3. Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

a) $\cos\left(\log_2\sqrt{x}\right)$

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$

c) $\log_{\sqrt{x}}(\cos^2 x)$

1405/04a

4. **a)** Deriváltfüggvényének segítségével elemezze az f: $]-2;3[\to\mathbf{R}$; $f(x)=x^3-1{,}5x^2-6x$ függvényt a következő szempontok szerint: növekedés és fogyás, lokális szélsőértékek helye és értéke!

1405/05a

5. **a)** Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3-5x^2-3x=0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs!

1410/04

4. Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe.

a) Igazolja, hogy ha $x \in]0;3[$, akkor $y > 0$.

b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordináta)

c) Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a görbe első síknegyedbe eső íve és az x tengely fog közre!

1505/5

5. Adott az f és g függvény:

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; f(x) = 2x + 1;$

$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; g(x) = x^2 - 2.$

a) Számítsa ki a $2f + g$ függvény zérushelyeit!

b) Számítsa ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt területet!

c) Számítással igazolja, hogy a $h :]-\infty;-0{,}5[\to \mathbf{R}; \; h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ függvény szigorúan monoton növekedő!

1605/07

7. Adott az f, a g és a h függvény:

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2^x - 1;$

$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = 3x + 2;$

$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, h(x) = 12 - x^2.$

a) Legyen a k összetett függvény belső függvénye az f és külső függvénye a h (vagyis $k(x) = h(f(x))$ minden x valós szám esetén). Igazolja, hogy $k(x) = 11 + 2^{x+1} - 4^x$.

b) Oldja meg az $f(g(x)) < g(f(x))$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

c) Mekkora a h és az $x \mapsto -4$ ($x \in \mathbf{R}$) függvények görbéi által közbezárt (korlátos) terület?

1710/4a

4. Adott a g függvény: $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ ($x \in \mathbf{R}$).

a) Adjon meg egy olyan (nem nulla hosszúságú) intervallumot, amelyen a g mindegyik helyettesítési értéke negatív!

1810/04ab

4. Egy zöldségárus vállalkozó egyik reggel 200 kg első osztályú barackot visz eladásra a piacra. Tapasztalatból tudja, hogy az első osztályú barack eladási egységára és a napi eladott mennyiség között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat van (az eladott mennyiség az eladási egységár lineáris függvénye). Ha egész nap 500 Ft/kg áron kínálná a barackot, akkor várhatóan a fele fogyna el, míg ha 300 Ft/kg áron adná, akkor a 70%-a.

a) Mennyi lenne a zöldségárusnak az első osztályú barack eladásából származó bevétele, ha egész nap 400 Ft/kg-os egységáron kínálná a barackot?

b) Igazolja, hogy ha egész nap x (Ft/kg) az első osztályú barack egységára, y (kg) pedig a napi eladott mennyiség, akkor a közöttük lévő kapcsolat:
$y = -\frac{1}{5}x + 200$ $(0 < x < 1000)$.

1910/01

1. Egy fafajta törzsének keresztmetszetét vizsgáljuk egy adott magasságban. Ez a keresztmetszet a fa 5 és 20 éves kora közötti növekedése során (jó közelítéssel) mindvégig kör alakúnak tekinthető. A kör átmérőjét a d: $[5; 20] \rightarrow \mathbf{R}$, $d(x) = -0,25x^2 + 20x + 40$ függvény adja meg, ahol x a fa években mért életkorát, $d(x)$ pedig az átmérő milliméterben mért hosszát jelöli.

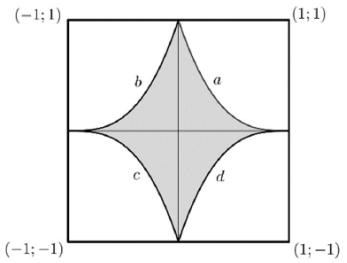
a) Hány cm a törzs keresztmetszetének átmérője akkor, amikor a fa éppen 10 éves?

b) Hány dm^2-rel nő a fatörzs keresztmetszetének területe a 11. évben?
Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

c) Hány éves a fa akkor, amikor a törzs keresztmetszetének kerülete éppen 1 méter?

1910/08a

8. Egy kétszemélyes társasjátékot olyan négyzet alakú táblán játszanak, amelyet fehér és szürke mezőkre osztottak fel az ábra szerint.
Ha a táblát egy olyan koordináta-rendszerbe helyezzük, amelyben a négyzet csúcsainak koordinátái (1; 1), (–1; 1), (–1; –1), illetve (1; –1), akkor ebben a koordináta-rendszerben az a jelű ív egyenlete: $y = (1-x)^3$, $0 \le x \le 1$. A tábla középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus.



a) Írja fel a másik három (az ábrán b, c, illetve d jelű) ív egyenletét is!

2005/05abc

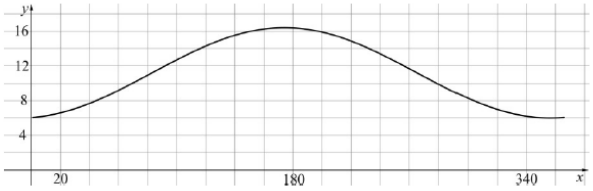
5. Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő f függvénnyel lehet modellezni:

$$f(n) = -5{,}2\cos\left(\frac{n+8}{58}\right)+11{,}2,$$

ahol n az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva ($1 \le n \le 365$, $n \in \mathbf{N}$).

Az alábbi ábra a $g:[1;365] \to \mathbf{R}$; $g(x) = -5{,}2\cos\left(\frac{x+8}{58}\right)+11{,}2$ függvényt szemlélteti.

(A g függvény az f-nek egy folytonos kiterjesztése.)



a) Ha $x = 1$, akkor $\frac{x+8}{58}$ helyettesítési értéke $\frac{9}{58}$.

Adja meg a $\frac{9}{58}$ radián értékét fokban mérve!

b) Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal! Válaszát óra:perc formátumban, egész percre kerekítve adja meg!

c) Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb!

2010/01

1. Adott két függvény:
$f:]0;130[\to \mathbf{R}$; $f(x) = 900 - 0{,}25(x-60)^2$, illetve $g:]0;130[\to \mathbf{R}$; $g(x) = 6{,}4x$.

a) Adja meg az f zérushelyét!

b) Számítsa ki az $f(20) - g(20)$ különbség értékét!

c) Adja meg a $h:]0;130[\to \mathbf{R}$; $h(x) = f(x) - g(x)$ függvény szélsőértékét (típusát, helyét és értékét)!

2010/05b

5. Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$f(x) = (x + 4)(2 - x)$
$g(x) = x + 4$
$h(x) = x^2 - 4$
$i(x) = |x| - 4$

a) Határozza meg az f és g függvények grafikonja által közrezárt korlátos síkidom területét!

Egy négypontú gráf csúcsait megfeleltetjük e négy függvénynek. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a két megfelelő függvénynek van közös zérushelye.

b) Rajzolja fel az így kapott gráfot!

2010/05c

Egy négypontú gráf csúcsait megfeleltetjük e négy függvénynek. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a két megfelelő függvénynek van közös zérushelye.

b) Rajzolja fel az így kapott gráfot!

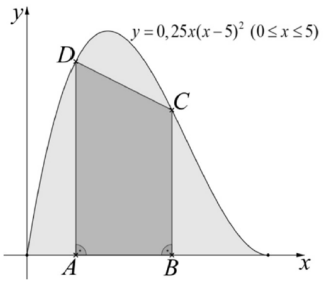
A valós számok halmazán értelmezett k függvény zérushelyei –5 és 3, az m függvény zérushelyei 3 és –3, az n függvény zérushelyei pedig 5 és –5.
A p elsőfokú függvény hozzárendelési szabálya $p(x) = x + c$, ahol c egy valós szám.

c) Hányféleképpen választható meg a c konstans értéke úgy, hogy a k, m, n és p függvényekre a **b)** feladatban megadott szabály szerint elkészített négypontú gráf fagráf legyen?

2105/04a

4. Adott az $y = 0,25x(x-5)^2 \ \ (0 \le x \le 5)$ egyenletű görbe.

a) Igazolja, hogy az origó és az (5; 0) pont is rajta van a görbén!



Az $ABCD$ derékszögű trapéz egyik szárának két végpontja az $A(1; 0)$, illetve a $B(3; 0)$ pont, a másik két csúcsa pedig a megadott görbén van, az ábra szerint.
A megadott görbe és az x tengely [0; 5] szakasza egy korlátos síkidomot fog közre.

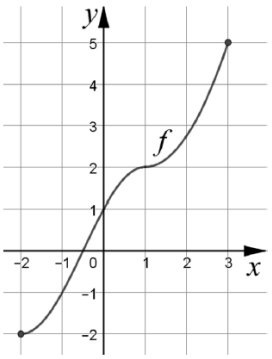
2105/05b

b) Mutassa meg, hogy az alábbi kijelentés igaz!

Az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = \dfrac{3}{(1+\cos x)^2 + 2}$ *függvény értékkészlete az* $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$ *intervallum.*

2105/07c

Az ábrán a [–2; 3] intervallumon értelmezett szigorúan monoton, folytonos *f* függvény grafikonja látható.



c) Adja meg az *f* **inverzfüggvényének** értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, és jellemezze az inverzfüggvényt monotonitás szempontjából!

2105/08ab

8. Egy sorsjegyből jelenleg havonta átlagosan 5000 darabot értékesítenek. Egy darab sorsjegy ára 500 Ft, de a forgalmazó cég ezt csökkenteni szeretné. A sorsjegy ára 10 Ft-os lépésekben csökkenthető. Azt feltételezik, hogy ha az ár *n*-szer 10 Ft-tal alacsonyabb lesz, akkor havonta $10n^2$-tel több sorsjegyet tudnak eladni ($n \in \mathbf{N}^+$). Tekintsük ezt a feltételezést helytállónak.

a) Határozza meg a sorsjegyek eladásából származó havi bevételt, ha a sorsjegy árát 300 Ft-ra csökkentik!

b) Határozza meg azt az *n* értéket, amelyre a sorsjegyek eladásából származó havi bevétel maximális lenne!

2210/04a

4. Adott az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2$ függvény ($x \in \mathbf{R}$).

a) Igazolja, hogy mindkét függvény grafikonja áthalad az origón és a $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ ponton!

2305/08a

8. **a)** Legyen f: $[1; \infty[\to [1; \infty[$, $x \mapsto 2x - 1$,
és g: $[1; \infty[\to [1; \infty[$, $x \mapsto \sqrt{x}$.
Oldja meg az $f(g(x)) = g(f(x))$ egyenletet!

2310/07a

7. Egy bizonyos fenyőfa (méterben mért) várható magasságának becslésére az alábbi képletet használják:
$h(t) = \frac{30}{1 + 59 \cdot 0{,}905^t}$, ahol *t* a megfigyelés kezdetétől eltelt idő években számítva.

a) Hány méter magas volt a fa a megfigyelés kezdetekor?

2405/01b

Adott az f és a g függvény:
$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = 2^{x-3}$
$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = 2^x - 7$

b) A két függvény grafikonját egy számítógépes programmal közös koordináta-rendszerben ábrázoltuk. Határozza meg a két grafikon metszéspontjának koordinátáit!

2405/01c

Legyen a h függvény értelmezési tartománya az egyjegyű pozitív prímszámok halmaza, és legyen $h(x) = 2^{x-3}$.

c) Határozza meg a h függvény inverzfüggvényének az értelmezési tartományát!

Gráfok

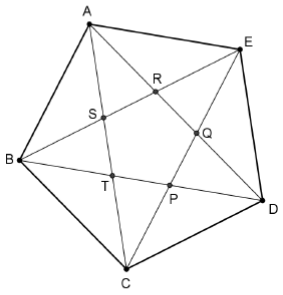
0505/2a

2. **a)** Döntse el, hogy az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Válaszát írja a táblázatba!
A: Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van.
B: Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros.
C: Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.
D: Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.

A	B	C	D

1010/6c

6. Megrajzoltuk az *ABCDE* szabályos ötszöget, és berajzoltuk minden átlóját. Az átlók metszéspontjait az ábra szerint betűztük meg: *P, Q, R, S, T*.



a) Hány olyan háromszög látható az ábrán, amelynek mindhárom csúcsa a megjelölt 10 pont közül való, és mindhárom oldalegyenese az *ABCDE* ötszög oldalegyenesei és átlóegyenesei közül kerül ki?

Hány lényegesen különböző háromszög van ezek között, ha az egymáshoz hasonló háromszögeket nem tekintjük lényegesen különbözőknek?

b) Tudjuk, hogy az *ABCQ* négyszög területe 120 cm^2. Mekkora az *ABCDE* ötszög területe? Válaszát egész értékre kerekítve adja meg!

c) Tekintsük azt a tíz csúcsú gráfot, amelyet a megadott ábra szemléltet. Erről a gráfról fogalmaztunk meg két állítást. Állapítsa meg mindkét állításról, hogy igaz vagy hamis! Adjon rövid magyarázatot válaszára!

1. állítás: Ennek a gráfnak 20 éle van.
2. állítás: Ebben a gráfban van olyan részgráf, amely nyolc élű kör.

1210/09

b) Az *A*, *B*, *C*, *D* és *E* pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő?

1305/03

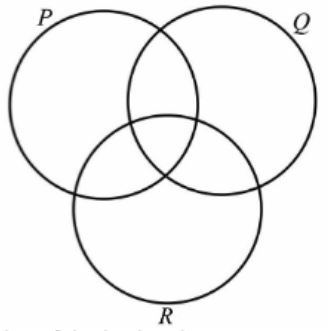
3. Tekintsük a következő, **egyszerű** gráfokra vonatkozó állítást:
Ha a gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő.

a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja!

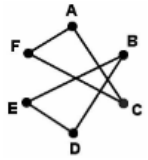
b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása! Válaszát indokolja!

1305/03

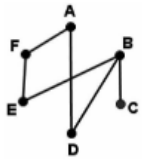
Tekintsük a következő halmazokat:
P = {összefüggő gráfok}, Q = {egyszerű gráfok}, R = {kört tartalmazó gráfok}.



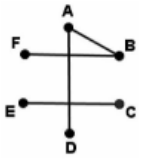
c) Helyezze el az alábbi gráfok ábrájának sorszámát a fenti halmazábrában a megfelelő helyre!



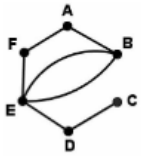
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

d) Rajzoljon egy 6 pontú fagráfot az 5. ábrára, és helyezze el ennek a sorszámát is a fenti halmazábrában a megfelelő helyre!

1310/09

9. Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körüljárási irányban rendre A, B, C, D és E.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk 4 húrt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek a húrok egy konvex négyszöget alkotnak?

b) Hányféleképpen juthatunk el a húrok mentén A-ból C-be, ha a B, D és E pontok mindegyikén legfeljebb egyszer haladhatunk át? (Az A pontot csak az út kezdetén, a C pontot csak az út végén érinthetjük.)

c) A 10 húr mindegyikét kiszínezzük egy-egy színnel, pirosra vagy sárgára vagy zöldre. Hány olyan színezés van, amelyben mindhárom szín előfordul?

1405/02

2. Jelölje H a $\sqrt{5{,}2-x} \leq 3$ egyenlőtlenség **pozitív egész** megoldásainak halmazát.

Jelölje továbbá B azon **pozitív egész** b számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám.

Elemeinek felsorolásával adja meg a H, a B, a $H \cap B$ és a $B \setminus H$ halmazt!

1410/08

8. **a)** Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)! Válaszait indokolja!

I. Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú.
II. Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.
III. Van olyan fagráf, amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.

Egy hatfős társaság tagjai A, B, C, D, E és F. Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös). A válaszként kapott hat természetes szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy A-nak legalább annyi ismerőse van, mint B-nek, B-nek legalább annyi ismerőse van, mint C-nek, és így tovább, E-nek legalább annyi ismerőse van, mint F-nek.

b) Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket!

1605/06a

6. **a)** Legyen G egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy G csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3.

1710/6cd

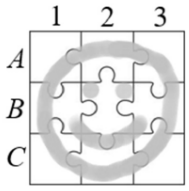
Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal „összekötünk” a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összekötöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)

c) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf!

d) Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan!

1805/5abc

5. Az ábrán egy 3×3-as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai ($A1$, $A2$, ... , $C3$) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalban) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képben.



a) Rajzolja fel a kirakós játék gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a fokszámok összegét!

b) Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll!

c) A teljesen kirakott képen jelöljön meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakósjáték általuk alkotott részlete (a részletnek megfelelő gráf) már ne legyen összefüggő!

1805/8a

8. **a)** Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!

Van olyan G_1, illetve G_2 fagráf, amelyre igaz, hogy a G_2 csúcsainak száma kétszerese a G_1 csúcsai számának, és a G_2 éleinek száma is kétszerese a G_1 élei számának. (A fagráfnak van legalább egy csúcsa.)

1905/07a

7. Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha a különbségük páros szám (de egyik számjegyet sem kötjük össze önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk.

a) Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

I. Lehetséges, hogy fagráfot kapunk.
II. Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk.

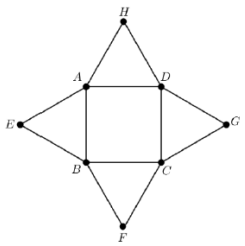
1910/06d

Megrajzoltuk az $ABCDE$ konvex ötszög oldalait és átlóit, majd a megrajzolt szakaszok mindegyikét vagy kékre, vagy zöldre színeztük. A színezés befejezése után észrevettük, hogy nincs olyan háromszög, amelynek csúcsai az A, B, C, D, E pontok közül valók, és mindhárom oldala azonos színű.

d) Igazolja (például indirekt módszerrel), hogy nincs olyan csúcsa az ötszögnek, amelyből legalább három azonos színű szakasz indul ki!

2005/04bc

Tekintsük az ábrán látható nyolcpontú gráfot.



b) A gráfban véletlenszerűen kiválasztunk két csúcsot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két csúcsot él köti össze a gráfban?

c) A gráf 9 élét kékre, 3 élét pedig zöldre színezzük. Igazolja, hogy bármelyik ilyen színezésnél lesz a gráfban egyszínű (gráfelméleti) kör!

2105/06

6. Egy nyomozás során fontossá vált felderíteni azt, hogy az A, B, C, D, E, F hattagú társaság mely tagjai ismerik egymást, azaz milyen a társaság *ismeretségi hálója* (ismeretségi gráfja).
(Az ismeretség bármely két tag között kölcsönös. A társaság két ismeretségi hálója akkor különböző, ha van két olyan tag, akik az egyik hálóban egymásnak ismerősei, de a másikban nem.)
A nyomozás során az már bizonyítottá vált, hogy A-nak 5, B-nek 4, C-nek 3 ismerőse van a társaságban. Ennél többet azonban nem sikerült kideríteni, így aztán D, E és F egymás közötti ismeretségeiről sincs még semmilyen információ.

a) Hányféle lehet a D, E, F csoport ismeretségi hálója?

A friss bizonyítékok szerint a D, E, F csoportban mindenki ismeri a másik két személyt.

b) Az összes eddigi (a korábban és a frissen beszerzett) információt figyelembe véve hányféle lehet az A, B, C, D, E, F hattagú társaság ismeretségi hálója?

A további információk kiderítése érdekében a hattagú társaság tagjait 3 fős csoportokba szervezve hallgatják ki. Minden olyan 3 fős csoport kihallgatását megszervezik, amelyben A és B együtt nincs jelen.

c) Összesen hány ilyen csoportos kihallgatást kell szervezni?

2205/08b

Egy hatfős baráti társaság tagjai András, Bori, Csaba, Dóra, Ervin és Fanni bajnokságon döntik el, hogy ki a legjobb pingpongos közülük. Mindenki mindenki ellen egy mérkőzést játszik. Amikor 9 mérkőzést már lejátszottak, akkor kiderült, hogy mindegyikük páratlan számú mérkőzésen van túl. András az eddigi egyetlen meccsét Bori ellen játszotta, Csaba még nem játszott Ervin ellen.

b) Játszott-e már Dóra Fanni ellen?

2210/07b

Egy ötpontú egyszerű gráf A, B, C, D, E pontjaihoz rendre a $3^{-2}, 3^{-7}, 3^{-12}, 1-\sqrt{2}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ számokat írtuk. A gráfban két pont akkor és csak akkor van éllel összekötve, ha a két ponthoz írt számok **összege** racionális szám.

b) Hány éle van ennek az ötpontú gráfnak?

2310/06c

Végül Attila Borókával, Csaba Dórával, Emil pedig Fannival került egy csapatba. A három csapat tagjai egyéni asztalitenisz-mérkőzéseket játszanak. Mindhárom csapat mindkét tagja egyszer játszik a másik két csapat mindkét tagjával. (Az egy csapatba tartozók nem játszanak egymás ellen.) Az egyes mérkőzéseket egymás után bonyolítják le. Az egyik mérkőzés után Attila megfigyelte, hogy a többi öt játékos mind különböző számú mérkőzést játszott eddig.

c) Hány mérkőzést játszott eddig Boróka?

2405/09a

9. Egy k és egy $2k$ pontú teljes gráfnak összesen 697 éle van.

a) Határozza meg k értékét!

2405/09c

Egy mérkőzés előtt az öltözőben hatan vannak, akik közül néhányan már kezet fogtak egymással. Mind a hat embertől megkérdeztük, hogy eddig hány másik emberrel fogott kezet. A válaszok között van öt különböző érték.

c) Hány kézfogás történhetett eddig összesen?

Halmazok

0505/5ab

5. Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem?

b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt?

0510/8ab

8. **a)** Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsőn az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult.
Hány tanulója van az osztálynak?

b) A három közül az első kiránduláson tíz tanuló körmérkőzéses asztalitenisz-bajnokságot játszott. (Ez azt jelenti, hogy a tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.)
Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott!

0805/1

1. Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek. Később Réka is átnézte ugyanazt a – javítatlan – szöveget, és ő is 30 hibát talált. Réka az Anett által megtalált hibákból 8-at vett észre, a Berta által észleltekből 11-et. Mindössze 5 olyan hiba volt, amit mind a hárman észrevettek.

a) Együtt összesen a szöveg hány hibáját fedezték fel?

b) A megtalált hibák hány százalékát vették észre legalább ketten?

0905/2b

Ebben a 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, a német és a francia.

b) Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:

(1) Minden diák tanul legalább két idegen nyelvet.

(2) Az angolt is és németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanulók számával.

(3) Angolul 27-en tanulnak.

(4) A németet is és franciát is tanulók száma 15.

1010/9

9. Egy egyetem 10 580 hallgatójának tanulmányi lapjáról összesítették az angol és német nyelvvizsgák számát. Kiderült, hogy a német nyelvvizsgával nem rendelkezők 70%-ának, a német nyelvvizsgával rendelkezők 30%-ának nincs angol nyelvvizsgája. Az angol nyelvvizsgával nem rendelkezők 60%-ának német nyelvvizsgája sincs.

a) Ezek közül a hallgatók közül hányan rendelkeztek angol és hányan német nyelvvizsgával?

b) A hallgatók hány százaléka rendelkezett az angol és német nyelvvizsgák mindegyikével?

1105/3

3. Egy város sportklubjának 640 fős tagságát felnőttek és diákok alkotják. A tagság 55%-a sportol rendszeresen. A rendszeresen sportoló tagok számának és a sportklub teljes taglétszámnak az aránya $\frac{11}{8}$ -szor akkora, mint a rendszeresen sportoló felnőttek számának aránya a felnőtt klubtagok számához viszonyítva. A rendszeresen sportolók aránya a felnőtt tagságban fele akkora, mint amekkora ez az arány a diákok között.

Hány felnőtt és hány diák tagja van ennek a sportklubnak?

1110/3

3. Egy 32 fős érettségiző osztály tanulói három különböző táncot mutatnak be a szalagavató bálon. Az alábbi táblázat az egyes táncokban fellépő diákok számát mutatja nemenkénti bontásban.

	Keringő	Kán-kán	Hip-hop	Egyik sem
Lány	9	6	10	2
Fiú	9	0	4	2

Van 2 olyan lány, aki mindhárom táncban fellép, ugyanakkor nincs olyan fiú az osztályban, aki egynél több produkcióban részt venne.

a) A lányok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, mennyi annak a valószínűsége, hogy mindketten táncolnak a kán-kánban?

b) Az osztály tanulói közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mennyi a valószínűsége annak, hogy az illető pontosan két táncban szerepel?

1305/01

1. Jelölje A az $\frac{x+4}{x-3} \leq 0$ egyenlőtlenség **egész** megoldásainak a halmazát, B pedig az $|x+3| < 4$ egyenlőtlenség **egész** megoldásainak a halmazát.

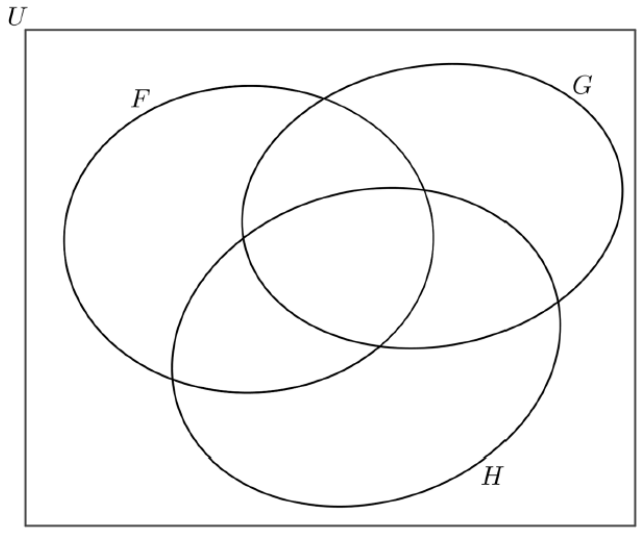
Elemei felsorolásával adja meg az $A \cap B$, az $A \setminus B$ és az $A \cup B$ halmazt!

1910/06ab

6. Legyen az U alaphalmaz a legalább 4 pontú egyszerű gráfok halmaza. Az F halmaz az U elemei közül pontosan azokat tartalmazza, amelyek fagráfok, a G halmaz pontosan azokat, amelyek összefüggő gráfok, a H halmaz pedig pontosan azokat, amelyek 6 pontú gráfok.

a) Az alábbi ábrán satírozással jelölje meg, és halmazműveletekkel is adja meg az U-nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz!

b) A megadott Venn-diagram minden egyes további részébe rajzoljon pontosan egy lehetséges gráfot!



2005/06a

6. **a)** Hány olyan 90-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely a 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható?

2010/08a

8. Legyen az alaphalmaz a háromjegyű pozitív egész számok halmaza. Az A halmaz elemei azok a háromjegyű számok, amelyekben van 1-es, a B halmaz elemei azok, amelyekben van 2-es, a C halmaz elemei pedig azok, amelyekben van 3-as számjegy.

a) Hány eleme van az $A \setminus (B \cap C)$ halmaznak?

2110/03a

3. **a)** Hány olyan pozitív háromjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely a 8 és a 9 számok közül legalább az egyikkel osztható?

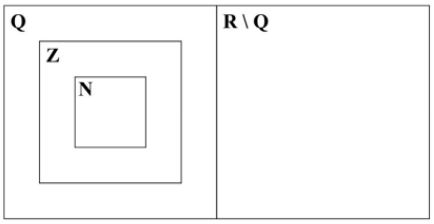
2205/03a

3. Egy társasházban 50-en laknak. A lakók 38%-a nő, 32%-a szemüveges.

a) Legalább, illetve legfeljebb hányan lehetnek a lakók között a nem szemüveges férfiak?

2210/07a

7. **a)** Az f függvény hozzárendelési szabálya $f(x)=3^{-x}$ ($x \in \mathbf{R}$). Helyezze el az alábbi halmazábra megfelelő részeibe az $f(-2)$, $f(0{,}5)$ és $f(5)$ függvényértékeket!



2305/07c

Egy szivattyúkat gyártó cég a selejtes termékeket visszavásárolja a forgalmazóktól, és a selejtraktárban tárolja. A selejtes termékek hibájuk alapján háromféle hibakódot kaphatnak. A törött termékek „T”, a hiányos termékek „H” és az egyéb hibával rendelkező termékek „E” kódot kapnak. Egy termék többféle hibakódot is kaphat a hibái alapján.
A selejtraktárban az év végi nyilvántartás szerint a csak T kóddal, a csak H kóddal és a csak E kóddal rendelkező termékek darabszáma megegyezik. Olyan selejtes termék nincs, amelynek háromféle kódja is van. T kódja 35 terméknek, H kódja 40, E kódja pedig 45 terméknek van. Kétszer annyi terméknek van T és E kódja is, mint ahánynak T és H kódja is.

c) Hány selejtes termék van a selejtraktárban?

2405/02c

c) A és B legyen a fenti H alaphalmaz két részhalmaza. Adja meg az alábbi (igaz) állítás megfordítását, és adja meg a megfordítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

„Ha $A = \overline{B}$, akkor $A \cap B = \emptyset$.”

Integrálszámítás

0505/4c

4. **a)** Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett, $x \mapsto \frac{1}{2}|x-4|+3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!

b) Állapítsa meg a függvény értékkészletét!

c) Forgassuk meg a $[0;4]$ intervallumra leszűkített függvény grafikonját az x tengely körül! Számítsa ki az így keletkezett forgástest felszínét!

0705/5d

d) Határozza meg az $\int_{-3}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx$ értékét!

0810/7b

Az f függvényt a következőképpen definiáljuk: $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+6x+5$.

b) Számítsa ki az f függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidom területét!

0905/4b

4. Legyen f és g is a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{ha } x\le -1\\ 2x+1, & \text{ha } -1<x<0\\ 1, & \text{ha } x\ge 0\end{cases} \quad \text{és} \quad g(x)=x^2-2.$$

a) Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben mindkét függvényt! Adja meg az $f(x)=g(x)$ egyenlet valós megoldásait!

b) Számítsa ki a két függvény grafikonja által közrefogott zárt síkidom területét!

0910/8c

8. Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja a $C(0;7)$ pont, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa (A és B) illeszkedik az $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az A és a B pont koordinátáit!

b) Írja fel az ABC háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának a további közös pontja D. Határozza meg a D pont koordinátáit!

c) Mekkora területű részekre bontja az ABC háromszöget a parabola íve?

1005/6

6. Legyen $f(x)=-\frac{4x^3}{a}+\frac{3x^2}{a}+\frac{2x}{a}-a$, ahol a pozitív valós szám és $x\in\mathbf{R}$.

a) Igazolja, hogy $\int_0^a f(x)\,dx=-a^3+a$.

b) Mely pozitív valós a számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x)\,dx\ge 0$?

c) Az x mely pozitív valós értéke esetén lesz a $g(x)=-x^3+x$ függvénynek lokális (helyi) maximuma?

1010/5

5. A $x^2=2y$ egyenletű parabola az $x^2+y^2\le 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a π közelítő értékét!

1110/6c

c) Az $ABCD$ négyzet csúcsai: $A(0;0)$, $B\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja?

1205/04

4. Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x)=-3x^3+(p-3)x^2+p^2x-6$.

a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)\,dx$ határozott integrál értékét, ha $p=3$.

1310/06b

b) A társaság emblémájának alaprajzát az f és $-f$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidommal modellezhetjük, ahol

$$f:[0;6]\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{ha } x\in[0;4]\\ \dfrac{x^2-12x+36}{2}, & \text{ha } x\in\,]4;6]\end{cases}.$$

Számítsa ki az embléma modelljének területét!

1405/04b

4. **a)** Deriváltfüggvényének segítségével elemezze az f: $]-2;3[\to\mathbf{R}$; $f(x)=x^3-1{,}5x^2-6x$ függvényt a következő szempontok szerint: növekedés és fogyás, lokális szélsőértékek helye és értéke!

b) Adja meg azt a g: $]-2;3[\to\mathbf{R}$ függvényt, amelyre igaz, hogy $g'=f$ (tehát az f függvény a g deriváltfüggvénye), és ezen kívül $g(2)=0$ is teljesül!

1410/04c

4. Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y=3x^2-x^3$ egyenletű görbe.

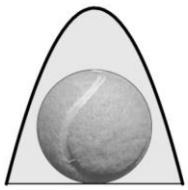
a) Igazolja, hogy ha $x\in\,]0;3[$, akkor $y>0$.

b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét!
(abszcissza: első koordináta)

c) Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a görbe első síknegyedbe eső íve és az x tengely fog közre!

1510/04a

4. Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni teniszbajnokság keretében mérték össze tudásukat. A verseny emblémáját parabolaszelet alakúra tervezték (lásd az ábrát). A koordináta-rendszerben készült tervrajzon a teniszlabda röppályáját jelképező $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola, valamint az x tengely határolja a parabolaszeletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete $x^2 + y^2 - 2{,}6y = 0$.



a) Hány százaléka a kör területe a parabolaszelet területének? A választ egészre kerekítve adja meg!

1510/07c

7. Adott az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = x^4 + 8x^3 - 270x^2 + 275$ függvény.

a) Igazolja, hogy $x = -15$-ben abszolút minimuma, $x = 0$-ban lokális maximuma, $x = 9$-ben lokális minimuma van a függvénynek!

b) Igazolja, hogy f konkáv a $]-9; 5[$ intervallumon!

c) A Newton-Leibniz-tétel segítségével határozza meg a $\int_0^5 f(x)dx$ határozott integrál értékét!

1605/07c

7. Adott az f, a g és a h függvény:
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x - 1$;
$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 3x + 2$;
$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = 12 - x^2$.

a) Legyen a k összetett függvény belső függvénye az f és külső függvénye a h (vagyis $k(x) = h(f(x))$ minden x valós szám esetén). Igazolja, hogy $k(x) = 11 + 2^{x+1} - 4^x$.

b) Oldja meg az $f(g(x)) < g(f(x))$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

c) Mekkora a h és az $x \mapsto -4$ $(x \in \mathbf{R})$ függvények görbéi által közbezárt (korlátos) terület?

1605/09b

9. A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x)=\frac{1}{20}(x^2-1800x+950\,000)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban ($x>0$), $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

a) A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg?

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km.

b) Igazolja, hogy v km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v-502\,200+\frac{265\,050\,000}{v}$ kg lesz! ($v>0$)

1610/7c

7. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:

$$f(x)=x^2-2 \text{ és } g(x)=10+10x-x^2.$$

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $|f(x)+g(x)|\geq 8$ egyenlőtlenséget!

b) Igazolja, hogy a [2; 8] intervallumon az f és a g függvény is csak pozitív értékeket vesz fel!

c) Határozza meg azt a t valós számot a [2; 8] intervallumban, amelyre teljesül, hogy az f függvény görbéje alatti terület a [2; t] intervallumon megegyezik a g függvény görbéje alatti területtel a [t; 8] intervallumon.
(Egy [a; b] intervallumon folytonos függvény görbéje alatti terület ezen az intervallumon megegyezik az x tengely, az $x=a$, az $x=b$ egyenletű egyenesek és a függvény grafikonja által meghatározott síkidom területével.)

1705/4a

4. Az f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-12x+27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét!

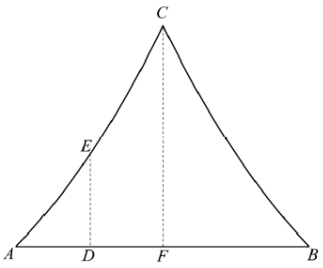
1710/4b

b) Határozza meg a c lehetséges értékeit úgy, hogy $\int_0^c g(x)\,dx=0$ teljesüljön!

1710/8b

8. Egy egyesületi összejövetel társaságához 5 nő és 4 férfi csatlakozott, így a nők aránya a korábbi 25%-ról 36%-ra nőtt.

a) Hány főből állt az eredeti társaság?



Az ábrán az egyesület székházának függőleges síkú homlokzata látható, amelyet az AC és BC egybevágó parabolaívek határolnak. A parabolák tengelye egy-egy függőleges egyenes, ezek az AB szakasz felezőmerőlegesére szimmetrikusan helyezkednek el.
A homlokzat szélessége $AB = 8$ méter, magassága $FC = 6$ méter, az AF szakasz D felezőpontjában mért tetőmagasság pedig $DE = 2{,}5$ méter.

b) Hány négyzetméter a homlokzat területe?

1805/8c

Az egyik cég azzal bízott meg egy reklámügynökséget, hogy tervezzen egy nagy méretű, függőlegesen leomló hirdetővásznat a budapesti Lánchíd fő tartóláncának egy részére.



A híd két támpillérének PV távolsága kb. 200 méter. A fő tartólánc alakja jó közelítéssel egy olyan (függőleges síkú) parabolának az íve, amelynek a tengelypontja a PV felezőpontja (U), a tengelye pedig a PV felezőmerőlegese. A lánc tartópillérnél becsült legnagyobb magassága $PQ = 16$ méter, a vászon tervezett szélessége $PS = 50$ méter. A tervek szerint a QR íven felfüggesztett hirdetővászon az ábrán sötétített $PQRS$ területet fedi majd be (RS merőleges PS-re).

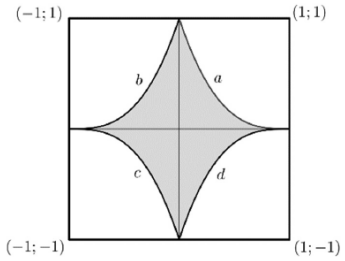
c) Hány m^2 területű vászon beszerzésére lesz szükség, ha a rögzítések miatt 8% veszteséggel számol a tervező?

1810/09a

9. **a)** Határozza meg a $p > 0$ paraméter értékét úgy, hogy $\int_0^p (3x^2 - 24x + 20)dx = 0$ teljesüljön!

1910/08b

8. Egy kétszemélyes társasjátékot olyan négyzet alakú táblán játszanak, amelyet fehér és szürke mezőkre osztottak fel az ábra szerint.
Ha a táblát egy olyan koordináta-rendszerbe helyezzük, amelyben a négyzet csúcsainak koordinátái (1; 1), (–1; 1), (–1; –1), illetve (1; –1), akkor ebben a koordináta-rendszerben az *a* jelű ív egyenlete: $y = (1-x)^3$, $0 \le x \le 1$. A tábla középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus.



a) Írja fel a másik három (az ábrán *b*, *c*, illetve *d* jelű) ív egyenletét is!

A társasjáték gyártója a 2 dm oldalú tábla fehér színű részének bevonásához egy speciális anyagot használ. Ebből 1 kg mennyiség 12 m^2 terület bevonásához elegendő.

b) Számítsa ki, hogy 4000 darab tábla elkészítéséhez hány kg speciális anyag szükséges!

2005/5d

Adott egy másik, az $y = -5{,}2\cos(x) + 11{,}2$ egyenletű görbe, valamint az $x = 0$, az $y = 0$ és az $x = 2\pi$ egyenletű egyenesek.

d) Számítsa ki a görbe és a három egyenes által határolt korlátos síkidom területét!

2010/05a

5. Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$f(x) = (x + 4)(2 - x)$
$g(x) = x + 4$
$h(x) = x^2 - 4$
$i(x) = |x| - 4$

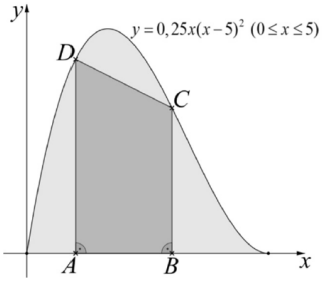
a) Határozza meg az *f* és *g* függvények grafikonja által közrezárt korlátos síkidom területét!

2105/04b

4. Adott az $y = 0{,}25x(x-5)^2$ $(0 \le x \le 5)$ egyenletű görbe.

a) Igazolja, hogy az origó és az (5; 0) pont is rajta van a görbén!

Az *ABCD* derékszögű trapéz egyik szárának két végpontja az *A*(1; 0), illetve a *B*(3; 0) pont, a másik két csúcsa pedig a megadott görbén van, az ábra szerint.
A megadott görbe és az *x* tengely [0; 5] szakasza egy korlátos síkidomot fog közre.



b) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk ennek a korlátos síkidomnak egy pontját, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a trapéznak is pontja lesz?

2110/07c

Adott három pont a koordináta-rendszerben: $A(1; 3)$, $B(3; 5)$ és $C(4; 4)$.

b) Adja meg az m értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű (origón átmenő) egyenes a megadott módszer szerint a *legjobban illeszkedjen az A, B és C* pontokra! ($m \in \mathbf{R}$)

Az $y = \frac{1}{3}(-2x^2 + 11x)$ egyenletű g görbe áthalad a megadott A és B pontokon, a h egyenes pedig az origón és a C ponton.

c) Mekkora a g és h által közbezárt korlátos alakzat területe?

2205/08c

c) Határozza meg a parabola és az x tengely által közrezárt korlátos síkidom területét!

2210/04b

4. Adott az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2$ függvény ($x \in \mathbf{R}$).

a) Igazolja, hogy mindkét függvény grafikonja áthalad az origón és a $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ ponton!

b) Határozza meg a két függvény grafikonja által közbezárt síkidom területét, ha $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$!

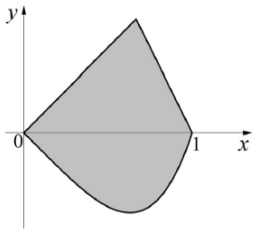
2305/08bc

b) Igazolja, hogy tetszőleges $a < b$ paraméterek esetén $\int_a^b (2x-1)dx = (b-a)(b+a-1)$.

c) Határozza meg az a és b **egész** paraméterek lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy $\int_a^b (2x-1)dx = 8$ $(a < b)$.

2305/09a

9. Az ábrán egy medence méretarányos (kicsinyített) felülnézeti tervrajza látható. A medencét az $y = x$ és az $y = -2x + 2$ egyenletű egyenes, valamint az $y = x^3 - x$ $(0 \le x \le 1)$ egyenletű görbe fogja közre.



a) Számítsa ki, hogy mekkora a tervezett medence alapterülete, ha a tervrajzon látható (0; 0) és (1; 0) pontok távolsága a valóságban 12 méter lesz!

2310/04c

c) Számítsa ki $\int_{-3}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2-2x+1\right)dx$ értékét!

2405/d

d) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 24(x + 1)(x + 3)$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt korlátos síkidom területét!

Kamatos kamat

0810/9

9. Egy bank a „Gondoskodás” nevű megtakarítási formáját ajánlja újszülöttek családjának. A megtakarításra vállalkozó családok a gyermek születését követő év első banki napján számlát nyithatnak 100 000 forint összeggel. Minden következő év első banki napján szintén 100 000 forintot kell befizetniük a számlára. Az utolsó befizetés annak az évnek az első banki napján történhet, amely évben a gyermekük betölti a 18. életévét.
A bank év végén a számlán lévő összeg után évi 8%-os kamatot ad, amit a következő év első banki napjára ír jóvá.
A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján férhet hozzá a számlához.

a) Mekkora összeg van ekkor a számlán? A válaszát egész forintra kerekítse!

A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján felveheti a számláján lévő teljes összeget. Ha nem veszi fel, akkor választhatja a következő lehetőséget is:
Hat éven keresztül minden év első banki napján azonos összeget vehet fel. Az első részletet a 18. születésnapját követő év első banki napján veheti fel. A hatodik pénzfelvétellel a számla kiürül. Ha ezt a lehetőséget választja, akkor a bank – az első pénzfelvételtől számítva – minden év végén a számlán lévő összeg után évi 5%-os kamatot garantál, amit a következő év első banki napjára ír jóvá.

b) Ebben az esetben mekkora összeget vehet fel alkalmanként? A válaszát egész forintra kerekítse!

0905/7

7. András edzőtáborban készül egy úszóversenyre, 20 napon át. Azt tervezte, hogy naponta 10 000 métert úszik. De az első napon a tervezettnél 10%-kal többet, a második napon pedig az előző napinál 10%-kal kevesebbet teljesített. A 3. napon ismét 10%-kal növelte az előző napi adagját, a 4. napon 10%-kal kevesebbet edzett, mint az előző napon, és így folytatta, páratlan sorszámú napon 10%-kal többet, páros on 10%-kal kevesebbet teljesített, mint a megelőző napon.

a) Hány métert úszott le András a 6. napon?

b) Hány métert úszott le összesen a 20 nap alatt?

c) Az edzőtáborozás 20 napjából véletlenszerűen választunk két szomszédos napot. Mekkora a valószínűsége, hogy András e két napon együttesen legalább 20 000 métert teljesített?

1305/04

4. **a)** Egy bank olyan hitelkonstrukciót ajánl, amelyben napi kamatlábat számolnak úgy, hogy az adott hitelre megállapított éves kamatlábat 365-tel elosztják. Egy adott évben a hitelfelvételt követően minden napra kiszámolják a napi kamat értékét, majd ezeket december 31-én összeadják és csak ekkor tőkésítik (azaz a felvett hitel értékéhez adják).
Ez a bank egy adott évben évi 8%-os kamatlábat állapított meg. Éva abban az évben a március 1-jén felvett 40 000 Ft után október 1-jén újabb 40 000 Ft hitelt vett fel. A két kölcsön felvétele után mennyi kamatot tőkésít a bank december 31-én?
(A hitelfelvétel napján és az év utolsó napján is számítanak napi kamatot.)

b) Ádám is vett fel hiteleket ettől a banktól évi 8%-os kamatos kamatra. Az egyik év január 1-jén éppen 1 000 000 Ft tartozása volt. Több hitelt nem vett fel, és attól kezdve 10 éven keresztül minden év végén befizette az azonos összegű törlesztőrészletet. (A törlesztőrészlet összegét a bank már az éves kamattal megnövelt tartozásból vonja le.)
Mekkora volt ez a törlesztőrészlet, ha Ádám a 10 befizetés után teljesen visszafizette a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

1410/03a

3. Egy kereskedőcég bevételei két forrásból származnak: bolti árusításból és internetes eladásból. Ebben az évben az internetes árbevétel 70%-a volt a bolti árbevételnek. A cég vezetői arra számítanak, hogy a következő években az internetes eladásokból származó árbevétel évente az előző évi internetes árbevétel 4%-ával nő, a bolti eladásokból származó árbevétel viszont évente az előző évi bolti árbevétel 2%-ával csökken.

a) Számítsa ki, hány év múlva lesz a két forrásból származó árbevétel egyenlő!

1505/7

7. Egy pénzintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi p%-os kamattal számol ($p > 0$), ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni).

A képletben $q = 1 + \frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészleteket (ez a hitel futamideje).

a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt?
Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os?

c) Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ határértéket, ha $q = 1{,}02$ és $H = 2\,000\,000$.

Kombinatorika

0505/2d

d) Fogalmazzon meg egy olyan szöveges feladatot, amelynek a megoldása így számítható ki: $\binom{17}{2}$.

0510/2

2. Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő szombat délutánonként együtt teniszeznek. Mikor megérkeznek a teniszpályára, mindegyik fiú kezet fog a többiekkel.

a) Hány kézfogás történik egy-egy ilyen közös teniszezés előtt?

Legutóbb Dani és Ernő együtt érkezett a pályára, a többiek különböző időpontokban érkeztek.

b) Hány különböző sorrendben érkezhettek ezen alkalommal?

c) A fiúk mindig páros mérkőzéseket játszanak, ketten kettő ellen. (Egy páron belül a játékosok sorrendjét nem vesszük figyelembe, és a pálya két térfelét nem különböztetjük meg.)
Hány különböző mérkőzés lehetséges?

0602/2

2. Az 52 941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

a) Az 52 941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk?

b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel?

c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyike sem négyzetszám!

0602/7a

7. A dominókészleten a dominókövek mindegyikén az egy-egy „térfélen” elhelyezett pöttyök száma 0-tól egy megengedett maximális értékig bármilyen természetes szám lehet. A dominókövek két felén e számok minden lehetséges párosítása szerepel. Nincs két egyforma kő a készletben.

a) Igazolja, hogy ha a pöttyök maximális száma 7, akkor a dominókészlet 36 kőből áll.

0605/6c

Ebben az intézetben 8 férfi és 9 nő dolgozik főállásban. Egy megbeszélés előtt, amikor csak ez a 17 főállású kutató jelent meg, a különböző nemű kutatók között 45 kézfogás történt. Tudjuk, hogy minden nő pontosan 5 férfival fogott kezet, és nincs két nő, aki pontosan ugyanazzal az öttel.

c) Lehetséges-e, hogy volt két olyan férfi is, aki senkivel sem fogott kezet?

0610/2

2. Egy szabályos játékkocka két oldalára 0-át, két oldalára 2-est, két oldalára 4-est írunk. A dobókockát ötször egymás után feldobjuk, és a dobások eredményét rendre feljegyezzük.

a) Hányféle számötöst jegyezhetünk fel?

b) Hányféle számötös esetében lehet a dobott pontok összege 10?

0705/7

7. Adott az $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz.

a) Adja meg az A halmaz háromelemű részhalmazainak a számát!

b) Az A halmaz elemeiből hány olyan öttel oszthető hatjegyű szám írható fel, amelyben a számjegyek nem ismétlődhetnek?

c) Az A halmaz elemeiből hány olyan hatjegyű szám írható fel, amely legalább egy egyest tartalmaz?

0710/8

8. Hat úszó: A, B, C, D, E és F indul a 100 méteres pillangóúszás döntőjében. Egy fogadóirodában ennek a döntőnek az első, a második és a hármadik helyezettjére lehet tippelni egy szelvényen. Az a fogadószelvény érvényes, amelyen megnevezték az első, a második és a harmadik helyezettet. Ha a fogadó valamelyik helyezésre nem ír tippet, vagy a hat induló nevén kívül más nevet is beír, vagy egy nevet többször ír be, akkor szelvénye érvénytelen. Holtverseny nincs, és nem is lehet rá fogadni.

a) Hány szelvényt kell kitöltenie annak, aki minden lehetséges esetre egy-egy érvényes fogadást akar kötni?

A döntő végeredménye a következő lett: első az A, második a B, harmadik a C versenyző.

b) Ha egy fogadó az összes lehetséges esetre egy-egy érvényes szelvénnyel fogadott, akkor hány darab legalább egytalálatos szelvénye lett? (Egy szelvényen annyi találat van, ahány versenyző helyezése megegyezik a szelvényre írt tippel.)

0805/5

5. Egy háromszög két oldalegyenese: az x tengely, valamint az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes.

Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Írja fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlő szárú, és

a) az alapja az x tengelyre illeszkedik;

b) az adott oldalegyenesek a háromszög száregyenesei!

0805/7a

7. Annának az IWIW-en 40 ismerőse van. (Az IWIW weboldalon lehetőség van az egymást ismerő emberek kapcsolatfelvételére. Ebben a feladatban minden ismeretséget kölcsönösnek tekintünk.)

Anna ismerőseinek mindegyike Anna többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer.

a) A szóba került 41 ember között összesen hány ismeretség áll fenn?

0810/5a

5. Egy urnában 5 azonos méretű golyó van, 2 piros és 3 fehér. Egyesével, és mindegyik golyót azonos eséllyel húzzuk ki az urnából a bent levők közül.

a) Hány különböző sorrendben húzhatjuk ki az 5 golyót, ha a kihúzott golyót nem tesszük vissza, és az azonos színű golyók nem különböztethetők meg egymástól?

0810/6c

6. Egy középiskola 12. osztályának egyik csoportjában minden tanuló olyan matematika dolgozatot írt, amelyben 100 pont volt az elérhető maximális pontszám. A csoport eredményéről a következőket tudjuk: 5 tanuló maximális pontot kapott a dolgozatára, minden tanuló elért legalább 60 pontot, és a dolgozatok pontátlaga 76 pont volt. Minden tanuló egész pontszámmal értékelt dolgozatot írt.

a) Legalább hányan lehettek a csoportban?

b) Legfeljebb hány diák dolgozata lehetett 60 pontos, ha a csoport létszáma 14?

A 14 fős csoportból Annának, Balázsnak, Csabának, Dorkának és Editnek lett 100 pontos a dolgozata. Pontosan hatan írtak 60 pontos dolgozatot, és csak egy olyan tanuló volt, akinek a pontszáma megegyezett az átlagpontszámmal.

c) Hányféleképpen valósulhatott ez meg? (A csoport két eredményét akkor tekintjük különbözőnek, ha a csoport legalább egy tanulójának különböző a dolgozatra kapott pontszáma a két esetben.)

0905/6a,b

6. Egy nagyvárosban a helyi járatokon olyan buszjegyet kell érvényesíteni, amelyen egy 3x3-as négyzetben 1–9-ig szerepelnek a számok (lásd 1. ábra).
A jegy érvényesítésekor a jegykezelő automata a kilenc mezőből mindig pontosan hármat lyukaszt ki.

a) Rajzolja le az összes olyan lyukasztást, amelyben minden sorban és minden oszlopban pontosan egy kilyukasztott mező van! Indokolja, hogy miért ezek és csak ezek a lehetséges lyukasztások!

b) Rajzoljon a 2. ábrán megadott mezőbe egy olyan lyukasztást, amelyen a ki nem lyukasztott hat kis négyzetlap olyan tartományt fed le, amelynek pontosan egy szimmetriatengelye van! (A mezőkre nyomtatott számoktól most eltekintünk.) Rajzolja be a szimmetriatengelyt!

0905/9

9. Öt egyetemista: Bence, Kati, Márti, Pali és Zoli nyáron munkát szeretne vállalni egy üdülőhelyen. A helyi újságban több megfelelőnek látszó munkahelyet is találtak, mégpedig a következőket: három éttermet, amelyekbe csak fiúkat, két fodrászatot, amelyekbe csak lányokat vesznek fel és két fagyizót, amelyekbe viszont alkalmaznak fiúkat és lányokat is. (Egyik munkahelyen sincs létszámkorlátozás.)

a) Hányféleképpen helyezkedhet el az öt fiatal, ha mind az öten egymástól függetlenül döntenek az állásokról, és minden fiatal csak egy állást vállal? (Az azonos típusú munkahelyeket is megkülönböztetjük.)

b) Hányféleképpen helyezkedhet el az öt fiatal, ha a 2 lány nem akar ugyanazon a munkahelyen dolgozni, és a 3 fiú közül is bármelyik kettő különböző munkahelyre szeretne menni?

Bence, Kati, Pali és Zoli asztaliteniszben körmérkőzést akarnak játszani. (A körmérkőzés azt jelenti, hogy mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést játszik.) Az első este csak három mérkőzést játszanak le.

c) Hányféle lehet a három mérkőzésben a játékosok párosítása, ha tudjuk, hogy négyük közül pontosan két játékos két-két mérkőzést játszott?

0910/5

5. A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztneve *B* betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen.
A család tagjairól még a következőket tudjuk:

- csak Bea és Barbara jár teniszezni is és kerékpározni is;
- egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem;
- Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani – sikertelenül.

a) A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak?

Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

b) Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság?

Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.

c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?

0910/7a

7. Egy matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A házigazda mindenkivel beszélt. Az azonos nemzetiségű vendégek egymást nem hívták, de a többiekkel mind beszéltek telefonon. Senki sem beszélt egy másik emberrel egynél többször, és minden beszélgetés pontosan két ember között zajlott.

a) Hány telefonbeszélgetést bonyolított le egymás között a 8 matematikus csütörtökön?

1005/2

2. Kilenc számkártya fekszik az asztalon.



a) Rakja négy csoportba a kilenc számkártyát úgy, hogy egyikben se legyen együtt egy szám és egy nála kisebb osztója! Adjon meg két lehetséges csoportosítást!

b) Berci körbe rakta a kilenc számkártyát egy nagy papírra, és ha két szám között legalább kettő volt a különbség, akkor a két kártyát összekötötte egy vonallal. Összesen hány vonalat rajzolt meg ily módon Berci?

Csaba az első hat kártya felhasználásával (1, 2, 3, 4, 5, 6) két háromjegyű számot készített. Hívjunk egy ilyen számpárt duónak. (Például egy lehetséges duó: „415 ; 362”.)
A hat számból több ilyen duót lehet készíteni. Két duót egyenlőnek tekintünk, ha ugyanaz a két különböző háromjegyű szám alkotja. Például a „415 ; 362” és a „362 ; 415” duó egyenlők, de a „362 ; 145” már egy másik duó.

c) Hány különböző duót lehet a hat számkártyából elkészíteni?

1005/8a

8.

a) Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak, és mindenkinek 1-1 fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük hátlapjára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül rakta borítékba, bár mindenki kapott a levelében egy fényképet is.

a1) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a fényképet, amelyen a saját neve szerepel?

1010/2a

2.

a) Hány olyan tízjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye a {0 ; 8} halmaz eleme ?

1105/1

1. Hatjegyű pozitív egész számokat képezünk úgy, hogy a képzett számban szereplő számjegy annyiszor fordul elő, amekkora a számjegy. Hány ilyen hatjegyű szám képezhető?

1105/8

8. Egy fából készült négyzetes oszlop minden élének hossza centiméterben mérve 2-nél nagyobb egész szám. A négyzetes oszlop minden lapját befestettük pirosra, majd a lapokkal párhuzamosan 1 cm élű kis kockára vágtuk. A kis kockák közül 28 lett olyan, amelynek pontosan két lapja piros.
Mekkora lehetett a négyzetes oszlop térfogata?

1110/6

6. **a)** Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét:
A: a dobott pontok összege prím;
B: a dobott pontok összege osztható 3-mal.

b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni?

1110/9

9. Öt, egymástól távol eső tanya között kábeleket feszítenek ki, bármely két tanya között legfeljebb egyet.

a) Elvileg összesen hány különböző hálózatot lehetséges létrehozni a tanyák között? (A hálózatban a kifeszített kábelek száma 0-tól 10-ig bármennyi lehet. Két hálózatot akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan összeköttetés, amely az egyikben létezik, de a másikban nem.)

b) Takarékossági okokból csak 4 kábelt feszítenek ki úgy, hogy a hálózat azért összefüggő legyen. (Összefüggőnek tekintünk egy hálózatot, ha a kábelek mentén bármely tanyáról bármely másikba el lehet jutni, esetleg más tanyák közbeiktatásával.) Hány különböző módon tehetik ezt meg, ha az egyes tanyákat megkülönböztetjük egymástól?

1205/06

6. Egy középiskolai évfolyam kézilabda házibajnokságán az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* és *F* osztály egy-egy csapattal vett részt.

a) Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és valamilyen sorrendben az *A* és a *B* osztály végzett az első két helyen, a *D* osztály pedig nem lett utolsó?

b) Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és az *E* osztály megelőzte az *F* osztályt?

A bajnokságon mindenki mindenkivel egyszer játszott, a győzelemért 2, a döntetlenért 1, a vereségért 0 pont járt. Végül az osztályok sorrendje *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* lett, az elért pontszámaik pedig rendre 8, 7, 6, 5, 4 és 0. Tudjuk, hogy a mérkőzéseknek éppen a harmada végződött döntetlenre, és a második helyezett *B* osztály legyőzte a bajnok *A* osztályt.

c) Mutassa meg, hogy a *B* és a *D* osztály közötti mérkőzés döntetlenre végződött!

1210/05

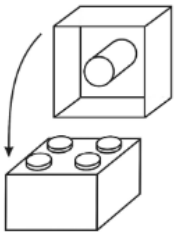
5. Adott két párhuzamos egyenes, e és f. Kijelölünk e-n 5, f-en pedig 4 különböző pontot.

a) Hány (e-től és f-től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont?
Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?
Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?

b) A 9 pont mindegyikét véletlenszerűen kékre vagy pirosra színezzük. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az e egyenes 5 pontja is azonos színű és az f egyenes 4 pontja is azonos színű lesz?

1305/8b

8. Egy építőkészletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építőelem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja. (Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm, az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm.



a) Mekkora a nagyobb henger átmérője?
Válaszát milliméterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

A készletben az építőelemek kék vagy piros színűek. Péter 8 ilyen elemet egymásra rak úgy, hogy több piros színű van köztük, mint kék. Lehet, hogy csak az egyik színt használja, de lehet, hogy mindkettőt.

b) Hányféle különböző színösszeállítású 8 emeletes tornyot tud építeni?

1405/01b

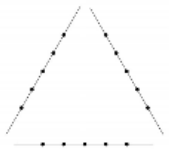
b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők.
Ezek között hány 12-vel osztható van?

1405/07c

c) Hányféleképpen foglalhatnak helyet hat egymás melletti széken úgy, hogy a három lány ne három egymás melletti széken üljön?

1410/06a

6. Megadtunk három egyenest, és mindegyiken megadtunk öt-öt pontot az ábra szerint.



a) Hány olyan szakasz van, amelynek mindkét végpontja az ábrán megadott 15 pont valamelyike, de a szakasz nem tartalmaz további pontot a megadott 15 pont közül?

1410/07b

A dobozokat egy öt karakterből álló kóddal jelölik meg. Minden kódban két számjegy és három nagybetű szerepel úgy, hogy a két számjegy nincs egymás mellett. Mindkét számjegy eleme a {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} halmaznak, a betűket pedig a 26 betűs (angol) ábécéből választják ki (például 7WA3A egy lehetséges kód).

b) Hány különböző kód lehetséges?

1505/3c

A kisvállalkozás üzletében az egyik fajta férfizakóból négyféle méretet árusítanak (S, M, L, XL). Nyitáskor egy rögzített állvány egyenes rúdjára mindegyik méretből 4-4 darabot helyeztek el (minden zakót külön vállfára akasztva, egymás mellett). A nap folyamán ezek közül megvettek 4 darab S-es, 3 darab M-es és 2 darab L-es méretűt, a megmaradt zakók pedig összekeveredtek.

c) Az üzlet zárásakor hányféle sorrendben lehetnek (balról jobbra nézve) a rúdra akasztva a megmaradt zakók, ha az azonos méretű zakókat nem különböztetjük meg egymástól?

1505/8c

Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)

c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni?
(Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha a, b, c, d pozitív számok, és $a + c = b + d$, akkor az a, b, c, d hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.)

1510/04b

A Zöld Iskolából 8, a Piros Iskolából 10 tanuló versenyzett a bajnokságon. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszott, az ugyanabba az iskolába járó tanulók is játszottak egymással. A verseny végén kiderült, hogy a Piros Iskola tanulói összesen kétszer annyi mérkőzést nyertek meg, mint a Zöld Iskola tanulói. (Teniszben döntetlen nincs.)

b) A Zöld Iskola versenyzői összesen hány olyan mérkőzést nyertek meg, amelyet a Piros Iskola valamelyik teniszezőjével játszottak?

1510/06c

Az *ABCDE* konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsa különböző színű legyen.

c) Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.)

1605/06c

c) Nyolc sakkozó részére egyéni bajnokságot szerveznek. Hányféleképpen készíthető el az első forduló párosítása, ha ebben a fordulóban mindenki egy mérkőzést játszik? (Két párosítást különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan mérkőzést, amelyet a másik nem.)

1610/4a

4. Egy kis boltban három különböző ízesítésű csokoládé kapható: epres, málnás és narancsos.

a) Ha összesen öt tábla csokoládét akarunk ebben a boltban vásárolni, és csak az ízesítéseket vesszük figyelembe, akkor hány különböző lehetőségünk van?

1610/6ab

6. A 11. b osztály a következő tanévre nyolc kötelező olvasmányt kapott. Ezek közül kettő ugyanannak a szerzőnek a munkája, a többi szerzőnek csak egy-egy könyve van az olvasmányok között. Andi még nyáron szeretne elolvasni a nyolc könyv közül hármat. A nyarat a nagyszüleinél tölti, ezért a kiválasztott három könyvet magával viszi.

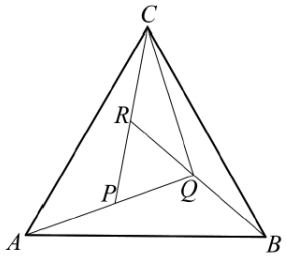
a) Hányféleképpen választhatja ki Andi, hogy melyik három könyvet vigye magával, ha azt szeretné, hogy a három könyv három különböző szerző műve legyen?

Az osztály tanulói közül hatan: Andi, Barbara, Csilla, Dani, Elek és Feri moziba mennek.

b) Hányféleképpen ülhetnek le hat egymás melletti székre úgy, hogy semelyik két lány ne üljön egymás mellett?

1705/8c

A piros, kék, zöld és sárga színek közül három szín felhasználásával úgy színezzük ki az ábrán látható ABQ, BCQ, CQR, ACP és PQR háromszögek belsejét, hogy a közös határszakasszal rendelkező háromszögek különböző színűek legyenek. (Egy-egy háromszög színezéséhez csak egy-egy színt használunk.)



c) Összesen hány különböző színezés lehetséges?

1710/3

3. **a)** A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával leírtuk az összes, különböző számjegyekből álló négyjegyű számot. Hány olyan van ezek között, amelyben a számjegyek összege 15?

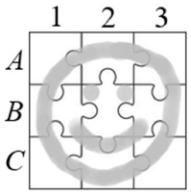
b) Egy n elemű halmaznak 11-szer annyi 4 elemű részhalmaza van, mint 2 elemű ($n \geq 4$). Határozza meg a halmaz elemszámát!

1805/3a

3. Ágoston a tanév első két hónapjában három osztályzatot szerzett matematikából (osztályzatok: 1, 2, 3, 4 vagy 5). A második osztályzata nem volt rosszabb, mint az első, a harmadik osztályzata pedig nem volt rosszabb, mint a második.

a) Határozza meg a feltételeknek megfelelő lehetőségek (számhármasok) számát!

1805/d



d) Hányféleképpen lehet a puzzle-elemek közül hármat úgy kiválasztani, hogy ezek a teljesen kirakott képben kapcsolódjanak egymáshoz (azaz mindhárom képrészlet közvetlenül kapcsolódjék legalább egy másikhoz a kiválasztottak közül)?
(Az elemek kiválasztásának sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)

1810/03b

b) Jelöljük meg a szabályos tizenkétszög A_1 csúcsát! Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik csúcsa az A_1, a másik két csúcsa pedig szintén a tizenkétszög valamelyik két csúcsával azonos? (Két háromszöget akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább az egyik csúcsuk különböző.)

1810/05

5. Kinga a következő tanítási napra hat házi feladatot kapott, három kötelezőt és három szorgalmit. Egy-egy kötelező házi feladatot kapott matematikából, angolból és magyarból, ezeket biztosan elkészíti. Szorgalmi házi feladatot biológiából, németből és történelemből kapott, ezeket nem feltétlenül csinálja meg: lehet, hogy mind a hármat elkészíti, lehet, hogy csak kettőt vagy egyet, de az is lehet, hogy egyet sem készít el.

a) Összesen hányféle különböző sorrendben készítheti el Kinga a házi feladatait? (Két esetet különbözőnek tekintünk, ha vagy nem ugyanazokat a házi feladatokat, vagy ugyanazokat a házi feladatokat, de más sorrendben oldja meg.)

Kinga matematika-házifeladata ez volt: „500 *különböző pozitív egész szám átlaga* 1000. *Legfeljebb mekkora lehet a számok közül a legnagyobb*?"

b) Adja meg Kinga matematika-házifeladatának megoldását!

Kinga, Linda, Misi és Nándi elvállalta, hogy az alacsonyabb évfolyamok tanulói közül hét diákot rendszeresen korrepetálni fog. Az egyénenként vállalt tanulók számát egy megbeszélésen döntik el.

c) Hány különböző módon állapodhatnak meg abban, hogy melyikük hány tanulót korrepetáljon, ha mindegyikük vállal legalább egy tanulót? (Két megállapodást különbözőnek tekintünk, ha legalább egyikük nem ugyanannyi tanulót korrepetál a két megállapodás szerint.)

1905/02b

b) Hány olyan pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata és összege is 12?

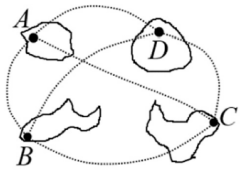
1905/05c

Egy téglatest bármely három csúcsa egy háromszöget határoz meg.

c) A téglatest csúcsai által meghatározott háromszögek között hány olyan van, amelynek a síkja nem esik egybe a téglatest egyik lapjának síkjával sem?

1905/07b

Az Óceán Légitársaságnak a megalakulása óta alapelve, hogy a szigetvilágban működő hálózatának bármely két célállomása között működtet repülőjáratot. (Az *ábra* azt a több évvel ezelőtti időszakot szemlélteti, amikor még csak négy célállomás és hat repülőjárat volt.)
A hálózatot folyamatosan bővítik: az utóbbi két év alatt a célállomások száma másfélszeresére nőtt, ugyanezen idő alatt a repülőjáratok száma pedig 60-nal lett több.



b) Hány célállomásra közlekednek jelenleg?

~~1905/08~~

8. A *szókereső* mobiltelefonos játékban a megtalált szó hossza (vagyis a szót alkotó betűk száma) határozza meg a játékosnak adott pontszámot. Egybetűs szóért nem jár pont, kétbetűs szóért 1 pont jár. Ha $n \geq 3$, akkor az n betűből álló szó megtalálásáért $\frac{n^2-5n+10}{2}$ pontot kap a játékos.[1]

a) Van-e olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos? Válaszát indokolja!

b) Igazolja, hogy a játékszabály szerint a hosszabb szóért több pont jár, és hogy csak egész pontszámot kaphat a játékos!

c) Igazolja, hogy ha m tetszőleges természetes szám, akkor a játékos kaphat $2+\frac{m(m+1)}{2}$ pontot! (A leírt játékszabály nem korlátozza a szavak hosszát, ezért feltehetjük, hogy tetszőleges hosszúságú „szó” létezik.)

formázott: Behúzás: Bal: 0 cm, Függő: 0,63 cm

1910/06c

Egy telephely K, L, M, N, O, P, Q épületei közül az éjszakai első ellenőrzés során ötöt ellenőriz a biztonsági őr.

c) Hányféleképpen tervezheti meg az útvonalát, ha a K és L épületeket mindenképpen ellenőrzi? (Két útvonal különböző, ha a két út során más épületeket, vagy ugyanazokat az épületeket, de más sorrendben ellenőriz a biztonsági őr.)

2005/02

2. Marci szeret az autók rendszámában különböző matematikai összefüggéseket felfedezni. (A rendszámok Magyarországon három betűből és az azokat követő három számjegyből állnak.)
Az egyik általa kedvelt típusnak a „prímes” nevet adta: az ilyen rendszámoknál a PRM betűket követő három számjegy szorzata prímszám.



a) Hány különböző „prímes” rendszám készíthető?

Egy másik típusnak a „hatos” nevet adta: az ilyen rendszámokban a HAT betűket követő három számjegy összege 6.



b) Hány különböző „hatos” rendszám készíthető?

Egy harmadik típus a „logaritmusos”. Ezek általános alakja: LOG-*abc*, ahol az a, b és c számjegyekre (ebben a sorrendben) teljesül, hogy $\log_a b = c$.



c) Hány különböző „logaritmusos” rendszám készíthető?

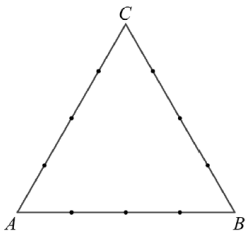
2010/02b

A csoport tagjai az egyik napon „keleties” ebédet kaptak. Az ételek ízesítéséhez hatféle fűszer állt rendelkezésükre: keserű, savanyú, édes, sós, csípős és fanyar.

b) Hányféleképpen ízesíthetik az ételeiket a résztvevők úgy, hogy a hatból három- vagy négyféle fűszert használhatnak, de az édes és a keserű nem szerepelhet egyszerre?

2010/09a

9. Az ABC szabályos háromszög mindhárom oldalát 3-3 osztóponttal négy egyenlő részre osztottuk.



a) Hány olyan négyszög van, melynek mind a négy csúcsa a háromszög oldalain kijelölt 9 pont közül való úgy, hogy a négyszögnek a háromszög mindegyik oldalán van legalább egy csúcsa?
(Két négyszöget különbözőnek tekintünk, ha legalább egy csúcsukban különböznek.)

2105/02b

Az $ABCD$ konvex négyszöget az átlói négy háromszögre bontják. Ezeket pirosra, kékre, sárgára vagy zöldre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos háromszög különböző színű legyen, de az egymással szemben fekvők azonos színűek is lehetnek. (Két háromszög szomszédos, ha van közös oldaluk.)

b) Hány olyan különböző színezés lehetséges, amelyhez pontosan 3 színt használunk?

2105/06

6. Egy nyomozás során fontossá vált felderíteni azt, hogy az A, B, C, D, E, F hattagú társaság mely tagjai ismerik egymást, azaz milyen a társaság *ismeretségi hálója* (ismeretségi gráfja).
(Az ismeretség bármely két tag között kölcsönös. A társaság két ismeretségi hálója akkor különböző, ha van két olyan tag, akik az egyik hálóban egymásnak ismerősei, de a másikban nem.)
A nyomozás során az már bizonyítottá vált, hogy A-nak 5, B-nek 4, C-nek 3 ismerőse van a társaságban. Ennél többet azonban nem sikerült kideríteni, így aztán D, E és F egymás közötti ismeretségeiről sincs még semmilyen információ.

a) Hányféle lehet a D, E, F csoport ismeretségi hálója?

A friss bizonyítékok szerint a D, E, F csoportban mindenki ismeri a másik két személyt.

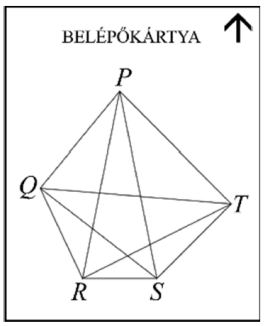
b) Az összes eddigi (a korábban és a frissen beszerzett) információt figyelembe véve hányféle lehet az A, B, C, D, E, F hattagú társaság ismeretségi hálója?

A további információk kiderítése érdekében a hattagú társaság tagjait 3 fős csoportokba szervezve hallgatják ki. Minden olyan 3 fős csoport kihallgatását megszervezik, amelyben A és B együtt nincs jelen.

c) Összesen hány ilyen csoportos kihallgatást kell szervezni?

2110/04a

4. Egy többnapos nemzetközi matematikakonferencia minden résztvevője belépőkártyát kap, amelyen a *PQRST* konvex ötszög és annak átlói láthatók. A szervezők úgy tervezik, hogy egy-egy belépőkártyán az ötszög oldalai és átlói közül valahányat (egyet vagy többet, akár az összeset, de az is lehet, hogy egyet sem) megvastagítanak, így a különböző személyek különböző ábrájú kártyát kapnak. Az elektronikus kapu optikai leolvasója ez alapján engedélyezi a belépést, és elvégzi a személy regisztrációját. (Két belépőkártya különböző, ha az egyiken szerepel olyan megvastagított szakasz, amelyik a másikon nem.)
A konferenciának 400 résztvevője lesz.



a) Jut-e mindenkinek különböző belépőkártya?

2110/08a

8. Egy áruházláncban minden *Kocka* csokoládé vásárlásakor a csoki mellé ajándékba adnak egy „zsákbamacska” csomagot, amelyben egy kis fémkocka van. A fémkocka mindegyik lapja sárga vagy kék színűre van festve úgy, hogy mind a két színű lap előfordul.

a) Igazolja, hogy (színezés szerint) összesen 8-féle kocka van, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek!

2205/05cd

Lali vesz még egy lekváros palacsintát 210 Ft-ért. Lali zsebében 100, 50, 20, 10 és 5 Ft-os érmék vannak, mindegyikből több is. Ezek közül 6 érmét választ ki.

b) Igazolja, hogy 6 érmével három különböző módon fizethető ki 210 Ft! (Két fizetést különbözőnek tekintünk, ha legalább az egyik címletű érméből eltérő számút használunk fel a két fizetés során.)

c) Hányféle sorrendben vehet elő Lali 6 olyan érmét a zsebéből, amelyek összege 210 Ft, ha egyesével húzza elő őket? (Az azonos címletű érméket nem különböztetjük meg egymástól.)

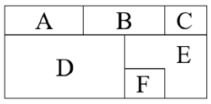
2205/08a

8. Egy baráti összejövetelen 7 fiú és 5 lány vett részt, találkozáskor mindenki üdvözölte a többieket. A fiúk kézfogással köszöntek egymásnak, két lány, illetve egy fiú és egy lány pedig öleléssel köszöntötte egymást.

a) Hány olyan találkozás volt, ahol öleléssel köszöntötték egymást?

2210/05a

5. Egy téglalapot hat tartományra osztottak fel az ábrán látható módon. Az A, B, C, D, E, F tartományokat úgy kell kiszínezni, hogy azonos színű tartományok ne érintkezzenek egymással. A színezéshez a piros, kék, zöld és sárga színek használhatók. (Mindegyik tartományt ki kell színezni a megadott színek egyikével, de nem kötelező mind a négy színt felhasználni.)



a) Hányféleképpen színezhető ki a téglalap úgy, hogy az A és C tartományok színe **különböző** legyen?

2210/08c

c) Hányféleképpen választhatunk ki egy téglatest csúcsai közül hármat úgy, hogy a kiválasztott három csúcs által meghatározott sík ne tartalmazza a téglatest egyetlen további csúcsát sem?

2305/02b

A 2022. július 1-jétől Magyarországon kiadott gépjárműrendszámok formátuma a következő:



- Összetétele: 4 betű a latin ábécéből, majd 3 számjegy. (A latin ábécé 26 betűből áll, melyek közül 5 magánhangzó és 21 mássalhangzó.)
- Az első két betűből vagy mindkettő magánhangzó, vagy mindkettő mássalhangzó, de az első betűpár nem lehet CS, GY, LY, NY, SZ, TY, ZS.
- A harmadik és negyedik betű tetszőleges lehet.
- A három számjegy mindegyike tetszőleges lehet, de 000-ra nem végződhet rendszám.

b) Hány különböző, a fenti szabályok mindegyikének megfelelő rendszám készíthető?

2305/05ab

5. Pali és a testvére, Lilla együtt szeretnének filmet nézni. Három film közül választanak: az egyik a *Kocka*, a másik *A kör*, a harmadik pedig a *Képlet* című film. Pali ezek közül az egyik filmnek 1 pontot, egy másiknak 2 pontot, a harmadiknak pedig 3 pontot ad, majd (Palitól függetlenül) ugyanezt teszi Lilla is. A két pontszámot mindegyik film esetében összeadják, majd a **legkisebb** pontösszegű filmet nézik meg. Ha több ilyen film is van, akkor filmnézés helyett társasjátékoznak.

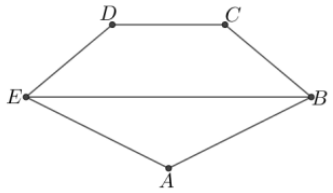
a) Melyik filmet néznék meg a testvérek, ha az alábbi táblázat szerint adnák a pontjaikat?

	Pali	Lilla
1 pont	A kör	Képlet
2 pont	Kocka	A kör
3 pont	Képlet	Kocka

b) Hányféleképpen oszthatják ki a pontokat a testvérek úgy, hogy mindhárom film pontösszege ugyanannyi legyen?

2310/05c

c) Hányféleképpen járható be az ábrán látható *ABCDE* ötpontú gráf, ha mindegyik élén pontosan egyszer kell végighaladnunk?
(A bejárás kezdőpontja a gráf egyik csúcsa; egy csúcsba érkezve csak olyan élen haladhatunk tovább, amely szintén az adott csúcsból indul.)



2310/06a

6. Egy hatfős baráti társaság, Attila, Boróka, Csaba, Dóra, Emil és Fanni három csapatot alkot. Mindhárom csapat 2 tagú, és mind a hatan pontosan egy csapatnak lesznek a tagjai.

a) Igazolja, hogy 15 különböző lehetőség van a három csapat kialakítására!
(Két lehetőség különböző, ha van olyan tag, akinek az egyik esetben más a csapattársa, mint a másikban.)

2405/02ab

2. **a)** Hány olyan hétjegyű szám van a kettes számrendszerben, amelyben legfeljebb két darab 0 számjegy található?

Legyen H az egyjegyű pozitív egész számok halmaza.

b) Hány olyan 4 elemű részhalmaza van H-nak, amelynek az 1 vagy a 2 eleme?

Koordináta-geometria

0505/1

1. Az ABC háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

$AB:\quad y = 0,$

$BC:\quad x + 10y = 20,$

$CA:\quad y = \frac{1}{2}x - 4.$

a) Számítsa ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit!
b) Számítsa ki a háromszög B csúcsánál lévő belső szöget!

0510/1

1. Egy háromszög két csúcsa $A(8;\ 2)$, $B(-1;\ 5)$, a C csúcs pedig illeszkedik az y tengelyre. A háromszög köré írt kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.

a) Adja meg a háromszög oldalfelező merőlegesei metszéspontjának koordinátáit!

b) Adja meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

0602/9

9. Az A pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}\,(\lg a;\lg b)$; a B pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}\left(\lg ab;\lg\frac{b}{a}\right)$, ahol a és b olyan valós számokat jelölnek, melyekre $0<a<1$, illetve $1<b$ teljesül.

a) Bizonyítsa be, hogy a B pont mindkét koordinátája nagyobb az A pont megfelelő koordinátájánál!

b) Bizonyítsa be, hogy az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra!

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge?

d) Legyen $a=\frac{1}{10}$, b pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az A, illetve a B pontok halmazát!

0605/1

1. A $PQRS$ négyszög csúcsai: $P(3;-1)$, $Q(1;3)$, $R(-6;2)$ és $S(-5;-5)$.
Döntse el, hogy az alábbi három állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Tegyen $*$ jelet a táblázat megfelelő mezőibe! Válaszait indokolja, támassza alá számításokkal!

a) A állítás: A $PQRS$ négyszögnek nincs derékszöge.

b) B állítás: A $PQRS$ négyszög húrnégyszög.

c) C állítás: A $PQRS$ négyszögnek nincs szimmetriacentruma.

0610/8

8. Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer (S) síkjában.
Az A halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $4x-3y\geq 18$,
azaz $A:=\{P(x;y)\in S \mid 4x-3y\geq 18\}$;
a B halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $x^2+y^2-6x+4y-12\leq 0$,
azaz $B:=\{P(x;y)\in S \mid x^2+y^2-6x+4y-12\leq 0\}$;
a C halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $y^2=4$,
azaz $C:=\{P(x;y)\in S \mid y^2=4\}$.

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatot alkotnak az A, a B és a C halmaz pontjai!

b) Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B\setminus A$ halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz?

c) Ábrázolja a $B\cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x;y)$ pontja van a legközelebb illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától?

0705/4b

b) Adja meg az $y=x^2-8x+11$ egyenlettel megadott alakzat $P(5;-4)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét!

0810/7a

7. Adott a $K(t) = t^2 + 6t + 5$ polinom. Jelölje H a koordinátasík azon $P(x; y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $K(x) + K(y) \leq 0$.

a) A H halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont az $C(-3; -3)$ ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van?

0905/3

3.

a) Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete $2x + y = 10$, egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van? Adja meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!

b) Jelölje e azokat az egyeneseket, amelyeknek egyenlete $2x + y = b$, ahol b valós paraméter. Mekkora lehet b értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott e egyenesnek és az origó középpontú, 4 egység sugarú körnek?

0910/8ab

8. Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja a $C(0; 7)$ pont, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa (A és B) illeszkedik az $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az A és a B pont koordinátáit!

b) Írja fel az ABC háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának a további közös pontja D. Határozza meg a D pont koordinátáit!

1005/7

7. Az $ABCD$ konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:

DA: $3x - 4y - 20 = 0$, AB: $3x + 5y - 20 = 0$,
BC: $4x - 3y + 12 = 0$, CD: $5x + 3y + 15 = 0$.

a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá hogy ennek a négyszögnek nincsen derékszöge!

b) Bizonyítsa be, hogy ez a négyszög húrnégyszög!

1105/6

6. Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa $A(1; -2)$.

a) Számítsa ki a szabályos háromszög másik két csúcsának koordinátáit!
Pontos értékekkel számoljon!

b) Véletlenszerűen kiválasztjuk az adott kör egy belső pontját. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a tekintett szabályos háromszögnek is belső pontja?
Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg!

1110/5

5. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik illeszkedik a $P(2;\ 5)$ pontra, valamint az $x+y=4$ és az $x+y=6$ egyenletű egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek első koordinátájának különbsége 3.

1210/08

8. A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(2;1)$, $B(7;-4)$, $C(11;\ p)$. Határozza meg a p paraméter **pontos értékét**, ha a háromszög B csúcsánál levő belső szöge 60°-os.

1305/05

5. Az $ABCD$ húrtrapéz köré írt körének egyenlete $(x-3)^2+(y-2)^2=100$. A húrtrapéz szimmetriatengelyének egyenlete $2x - y = 4$. A trapéz AB alapjának egy belső pontja $P(-5;\ 1)$, BC szárának hossza pedig $10\sqrt{2}$ egység.
Határozza meg a trapéz csúcsainak koordinátáit!

1405/08

8. Egy $ABCD$ négyzet A csúcsa a koordinátarendszer y tengelyére, szomszédos B csúcsa pedig a koordinátarendszer x tengelyére illeszkedik.

a) Bizonyítsa be, hogy a négyzet K középpontjának koordinátái vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei!

b) Egy ilyen négyzet középpontja a (7; 7) pont. A négyzet oldala 10 egység hosszú. Számítsa ki a négyzet koordinátatengelyekre illeszkedő két csúcsának koordinátáit!

1505/4

4. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(-16;\ 10)$, $B(2;\ 4)$, $C(10;\ 2)$.

a) Számítsa ki az ABC háromszög B csúcsánál fekvő belső szögét!

A K pont egyenlő távolságra van A-tól, B-től és C-től.

b) Határozza meg a K pont koordinátáit!

1610/5

5. **a)** Adja meg az $5x^2 + 5y^2 - 14x + 22y - 11 = 0$ egyenletű kör középpontját és sugarát!

Adott a k kör, amelynek középpontja a $K(-5;\ 7)$ pont, és a sugara 10 egység. Ezen a körön belül adott az $A(-4;\ 14)$ pont.

b) Írja fel annak az A ponton áthaladó e egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a KA szakaszra!

c) Határozza meg a k kör e egyenesre illeszkedő húrjának hosszát!

A koordináta-rendszer $P(x;\ y)$ pontját rácspontnak nevezzük, ha x és y egész számok.

d) Hány rácsponton megy át a k körvonal?

1705/4c

4. Az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 - 12x + 27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét!

b) Írja fel a parabolához az $E(5; -8)$ pontjában húzott érintő egyenletét!

c) Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit!

1710/1

1. Egy téglalap alakú városi park tervezésekor a kezdeti egyszerű vázlatokat egy rajzoló-program segítségével készíti el a tervező. A parkot derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja úgy, hogy a koordináta-rendszer tengelyein a hosszúságegység a valóságban 10 méternek felel meg. A park négy csúcsát az $A(0;\ 0)$, $B(30;\ 0)$, $C(30;\ 48)$, $D(0;\ 48)$ koordinátájú pontok adják meg. Az első tervek között a négy csúcson átmenő körút is szerepel.

a) Adja meg ennek a körnek az egyenletét!

A vázlatba a tervező egy olyan kört is berajzolt, amely egy díszteret határol majd. A kör egyenletét a rajzolóprogram $x^2 + y^2 - 36x - 48y + 819 = 0$ alakban adta meg.

b) Számítsa ki, hány százaléka a dísztér területe a park területének!

A tervező egy olyan egyenest is megrajzolt, amely a park C csúcsában lévő bejáraton és a $P(18;\ 24)$ ponton halad át. Ezen az egyenesen egy sétaút halad majd.

c) Határozza meg a sétaút egyenesének egyenletét, és számítsa ki a parkbeli szakaszának valódi hosszát!

1805/6

6. Adott az $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 34 = 0$ egyenletű k kör.

a) Igazolja, hogy az $E(-7; 5)$ pont rajta van a k körön!

b) Írja fel a k kör E pontjában húzható érintőjének egyenletét!

c) Határozza meg az m valós paraméter összes lehetséges értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű e egyenesnek és a k körnek ne legyen közös pontja!

1905/06b

Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-6; 0)$, $B(6; 0)$ és $C(0; 8)$.

b) Igazolja, hogy a $3x - 4y = -12$ egyenletű e egyenes felezi az ABC háromszög kerületét és területét is!

2005/07

A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a $P(-2; 0)$, $Q(6; 0)$ és $R(0; 5)$ pontok, a H pedig a PQ szakasz tetszőleges pontja.

b) Számítsa ki a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzatát, ha $H(-1{,}8; 0)$.

c) Adja meg a H pont koordinátáit úgy, hogy a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzata maximális, illetve úgy is, hogy minimális legyen!

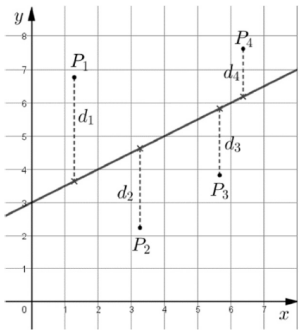
2105/07b

A kosárlabda büntetődobást 4,6 méter távolságról kell elvégezni, a gyűrű 3 méter magasan van. Petra a dobás pillanatában 2 méter magasságból engedi el a labdát, és az ideális, vízszintessel bezárt 45°-os szögre törekszik a dobás indításánál.

b) Petra dobásának modellezéséhez határozza meg annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad a $P(0; 2)$ és a $Q(4{,}6; 3)$ ponton, a P pontban húzott érintőjének irányszöge pedig 45°! A parabola egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban adja meg!

2110/07a

7. A statisztikai értékelések során szükség van az adatokat és összefüggéseket szemléltető pontok és egyenesek kölcsönös helyzetének jellemzésére. Egy ilyen jellemző lehet a pontnak egy megadott egyenestől mért *függőleges távolsága*.
Az ábrán látható P_1, P_2, P_3, P_4 pontok esetén a függőleges távolságok rendre a d_1, d_2, d_3, d_4 szakaszok hosszával egyenlők. (A távolságokat megadó szakaszok párhuzamosak az y tengellyel.)



a) Határozza meg az $R(4; 2)$ és az $S(4; 5)$ pontok *függőleges távolságát* az $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ egyenestől!

2205/06ab

6. Egy egyenlőszárú háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(0; 0)$, $B(82; 0)$ és $C(41; 71)$. Géza szerint ez a háromszög szabályos.

a) Határozza meg a háromszög szögeit fokban, három tizedesjegyre kerekítve!

b) Határozza meg a háromszög AC és AB oldalainak arányát négy tizedesjegyre kerekítve!

2205/08ab

9. Adott az $x^2 + 2y = 16$ egyenletű parabola és az $x^2 + (y-3)^2 = 9$ egyenletű kör.

a) Határozza meg a parabola fókuszpontjának és a kör középpontjának a koordinátáit!

b) Igazolja, hogy a $Q(2\sqrt{2}; 4)$ pont a parabolának és a körnek is pontja, és a kör Q-ban húzott érintője érinti a parabolát is!

2210/01

1. Adott a $C(-6; -2)$ és a $P(-3; 2)$ pont.

a) Írja fel a C középpontú, P ponton átmenő k kör egyenletét!

b) Írja fel a k kör P pontra illeszkedő érintőegyenesének egyenletét!

A C és P pontokon áthaladó egyenes és a két koordinátatengely egy derékszögű háromszöget határoz meg.

c) Határozza meg a háromszög köré írható kör sugarának hosszát!

2305/09b

Adott az $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$; $f(x) = -x^3 + kx$ függvény (k valós paraméter). Az f függvény grafikonjához egy-egy érintőt húzunk az $x = 1$, illetve az $x = 2$ abszcisszájú pontjában.

b) Igazolja, hogy a két érintő metszéspontjának első koordinátája (a k paraméter értékétől függetlenül) $\frac{14}{9}$.

2405/08

8. A k_1 kör egyenlete a derékszögű koordináta-rendszerben $x^2 - 4x + y^2 - 12y = 13$.

a) Határozza meg a k_1 kör sugarát és középpontjának koordinátáit!

A k_1 körbe írható $ABCD$ húrtrapéz csúcsai $A(4; 13)$, $B(-5; 4)$, $C(4; -1)$ és $D(9; 4)$.

b) Határozza meg a húrtrapéz magasságát és szögeit!

A k_2 kör egyenlete a derékszögű koordináta-rendszerben $x^2 + y^2 = 53$.

c) Hány olyan pont található a k_2 körvonalon, amelynek mindkét koordinátája egész szám?

Logaritmikus egyenlet

0610/1b

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg(x+7) + \lg(3x+1) = 2$

0810/1a

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $(x-2)\cdot\lg(x^2-8) = 0$

0905/5c

c) $\lg(x^2 + x - 6) = \lg(1 - x^2)$

0910/1

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $0{,}5^{2-\log_{0,5} x} = 3$, ahol $x > 0$ és $x \in \mathbf{R}$.

b) $7 + 6\log_x \frac{1}{2} = \log_2 x$, ahol $1 < x \leq 2$ és $x \in \mathbf{R}$.

1205/07

7. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a (2; 6) pontra. Tudjuk, hogy $a < 0$. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját P, az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki ezt a területet (O a koordináta-rendszer origóját jelöli)!

2105/01b

b) $2\log_4 x^2 + 3\log_4 x^3 = \log_4 x^4 + \log_4 8^9$

2210/02b

b) $\log_3(x+8) + \log_3(x-2) - \log_3(x+4) = 1$

2305/01a

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$

2310/07b

7. Egy bizonyos fenyőfa (méterben mért) várható magasságának becslésére az alábbi képletet használják:

$h(t) = \dfrac{30}{1+59\cdot 0{,}905^t}$, ahol t a megfigyelés kezdetétől eltelt idő években számítva.

a) Hány méter magas volt a fa a megfigyelés kezdetekor?

b) A megfigyelés kezdetétől számítva hány év múlva lesz a fa 10 méter magas?

2405/01a

1. **a)** Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$3 + \log_2(x-2) = \log_2(2x+8)$

Logaritmikus egyenlőtlenség

1105/2

2. Legyen $A = \left\{ x \in \mathbf{R} \;\middle|\; \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5-x} \right\}$ és $B = \left\{ x \in \mathbf{R} \;\middle|\; \log_{\frac{1}{2}}(2x-4) > -2 \right\}$.

Adja meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ halmazokat!

1810/02b

b) Igazolja, hogy $\dfrac{\lg 5^x + \lg 5^{-x}}{2} \leq \lg \dfrac{5^x + 5^{-x}}{2}$ $(x \in \mathbf{R})$.

1910/02c

c) Hány olyan egész szám van, amelyik gyöke az alábbi egyenlőtlenségnek?

$\log_{0,5}(2x+100) \geq -8$

Logaritmikus egyenletrendszer

0510/5

5. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned}\log_x\left(x^2y^3\right)+\log_y\left(x^3y\right)&=9\\ \cos(x+y)+\cos(x-y)&=0\end{aligned}\right\}$$

0605/3

3. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y valós számok!

$$\left.\begin{aligned}10^y&=x-3\\ \lg(x^2-4x+3)&=2y+1\end{aligned}\right\}$$

0710/1b

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned}\lg(x+y)&=2\lg x\\ \lg x&=\lg 2+\lg(y-1)\end{aligned}\right\}$$

1110/4

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x>0,\ x\neq 1$ és $y>0,\ y\neq 1$.

$$\log_x y+\log_y x=2$$
$$\sin(2x+3y)+\sin(4x+y)=1$$

1705/1a

1. **a)** Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y pozitív valós számok!

$$\left.\begin{aligned}x+y&=0{,}2\\ \frac{\lg x+\lg y}{2}&=\lg\frac{x+y}{2}\end{aligned}\right\}$$

Logika

0505/2c

c) Tagadja az alábbi mondatot:
”Nincs olyan szerelem, aki el nem múlik.” (*Népdalgyűjtés*)

1305/03

3. Tekintsük a következő, **egyszerű** gráfokra vonatkozó állítást:
Ha a gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő.

a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja!

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása! Válaszát indokolja!

1510/06ab

6. A H halmaz a nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik: *Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.*

a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

2105/05c

c) Tudjuk, hogy az A, B, C kijelentések mindegyike 0,6 valószínűséggel igaz és 0,4 valószínűséggel hamis. Ebben az esetben mennyi annak a valószínűsége, hogy az $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés igaz?

2110/01bc

Legyen $f(x) = x^2 - 9x + 14$, ahol x valós szám.
Tekintsük a következő állítást: „Ha $x > 7$, akkor $f(x) > 0$.”

b) Adja meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Igaz-e az állítás megfordítása? Válaszát indokolja!

2305/02c

c) Jelölje meg annak az állításnak a betűjelét, amely tagadása a következő állításnak: „*Bármely két magyar rendszám különböző.*”

A) Minden magyar rendszám egyforma.
B) Van pontosan két egyforma magyar rendszám.
C) Van legalább két egyforma magyar rendszám.
D) Nincs két egyforma magyar rendszám.

2405/02c

c) A és B legyen a fenti H alaphalmaz két részhalmaza. Adja meg az alábbi (igaz) állítás megfordítását, és adja meg a megfordítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

„Ha $A = \overline{B}$, akkor $A \cap B = \emptyset$."

Másodfokú egyenlet

0505/6

6. Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x) = (p-3{,}5)x^2 + 2(p-2)x + 6$ függvényt, ahol p tetszőleges valós paraméter!

a) Mutassa meg, hogy tetszőleges p érték mellett az $x = -2$ zérushelye a függvénynek!

b) Milyen p értékek esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb?

0810/1b

b) $x^2 - |x| = 6$

0905/5a

a) $\dfrac{2x^2 + x - 10}{2^{x-1} - 2} = 0$

1610/3b

Egy külföldi utazás teljes árú vasúti menetjegye tavaly 209 euróba került. A menetjegy árát fél évvel ezelőtt p euróval felemelték, majd a múlt héten p százalékkal csökkentették ($p > 0$). Így a menetjegy ára 189 euró lett.

b) Határozza meg p értékét!

1710/3b

b) Egy n elemű halmaznak 11-szer annyi 4 elemű részhalmaza van, mint 2 elemű ($n \geq 4$). Határozza meg a halmaz elemszámát!

1905/08

8. A *szókereső* mobiltelefonos játékban a megtalált szó hossza (vagyis a szót alkotó betűk száma) határozza meg a játékosnak adott pontszámot. Egybetűs szóért nem jár pont, kétbetűs szóért 1 pont jár. Ha $n \geq 3$, akkor az n betűből álló szó megtalálásáért $\frac{n^2-5n+10}{2}$ pontot kap a játékos.[1]

a) Van-e olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos? Válaszát indokolja!

b) Igazolja, hogy a játékszabály szerint a hosszabb szóért több pont jár, és hogy csak egész pontszámot kaphat a játékos!

c) Igazolja, hogy ha m tetszőleges természetes szám, akkor a játékos kaphat $2+\frac{m(m+1)}{2}$ pontot! (A leírt játékszabály nem korlátozza a szavak hosszát, ezért feltehetjük, hogy tetszőleges hosszúságú „szó” létezik.)

2005/04

4. Adott az $x^2-(4p+1)x+2p=0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

a) Igazolja, hogy bármely valós p érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van!

b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke?

c) Határozza meg a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen!

2105/05a

5. **a)** Határozza meg az m valós szám összes lehetséges értékét úgy, hogy az alábbi kijelentés igaz legyen!

Az $x^2-2x+4=mx$ egyenletnek pontosan két különböző valós gyöke van.

2405/05c

c) Határozza meg azokat az n pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $\frac{(n+4)!}{n!}=24(n+1)(n+3)$.

Másodfokú egyenletrendszer

1210/02

2. Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám?

1510/03a

3. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a rendezett valós számpárok halmazán!

a) $\begin{cases} 2x = 12 - y \\ 2\sqrt{x} = y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y-3}{4} = 3 \\ \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{y-3} = 0 \end{cases}$

Másodfokú egyenlőtlenség

1010/1a

1.

a) Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?
$(x-1)^3 - (x+1)^3 > -8$

1610/1a

1. Legyen az x pozitív valós szám.

a) Határozza meg x értékét úgy, hogy a 27 és az x számtani közepe 6-tal nagyobb legyen, mint a mértani közepük!

1610/7a

7. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:

$$f(x) = x^2 - 2 \text{ és } g(x) = 10 + 10x - x^2.$$

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $|f(x) + g(x)| \geq 8$ egyenlőtlenséget!

1610/7b

b) Igazolja, hogy a [2; 8] intervallumon az f és a g függvény is csak pozitív értékeket vesz fel!

1710/4a

4. Adott a g függvény: $g(x) = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$ ($x \in \mathbf{R}$).

a) Adjon meg egy olyan (nem nulla hosszúságú) intervallumot, amelyen a g mindegyik helyettesítési értéke negatív!

1805/2b

b) Legyen $f(x) = x^2 - 11x + 30$.

Igazolja, hogy ha $f(x) \neq 0$, akkor $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x-4}{x-6}$.

Mértani sorozat

0510/3

3. Péter nagypapája minden évben félretett némi pénzösszeget egy perselybe unokája számára. 5000 Ft-tal kezdte a takarékoskodást 1996. január 1-én. Ezután minden év első napján hozzátett az addig összegyűlt összeghez, mégpedig az előző évben félretettnél 1000 Ft-tal többet. 2004. január 1-jén a nagypapa bele tette a perselybe a megfelelő összeget, majd úgy döntött, hogy a perselyt unokájának most adja át.

a) Mekkora összeget kapott Péter?

b) Péter nagypapája ajándékából vett néhány apróságot, de elhatározta, hogy a kapott összeg nagyobb részét 2005. január 1-jén bankszámlára teszi. Be is tett 60000 Ft-ot évi 4%-os kamatos kamatra (a kamatok minden évben, év végén hozzáadódnak a tőkéhez). Legalább hány évig kell Péternek várnia, hogy a számláján legalább 100000 Ft legyen úgy, hogy közben nem fizet be erre a számlára?

0605/4a

4.

a) Legyen (a_n) egy mértani sorozat, melynek első tagja 5, hányadosa 3.

Mennyi a valószínűsége, hogy ha ennek a mértani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad?

0710/3

3. Egy dolgozó az év végi prémiumként kapott 1 000 000 Ft-ját akarja kamatoztatni a következő nyárig, hat hónapon át. Két kedvező ajánlatot kapott. Vagy kéthavi lekötést választ kéthavi 1,7%-os kamatra, kéthavonkénti tőkésítés mellett, vagy a forintot átváltja euróra, és az összeget havi 0,25%-os kamattal köti le hat hónapra, havi tőkésítés mellett.

a) Mennyi pénze lenne hat hónap után a forintszámlán az első esetben? (Az eredményt Ft-ra kerekítve adja meg.)

b) Ha ekkor éppen 252 forintot ért egy euró, akkor hány eurót vehetne fel hat hónap múlva a második ajánlat választása esetén? (Az eredményt két tizedes jegyre kerekítve adja meg.)

c) Legalább hány százalékkal kellene változnia a 252 forint/euró árfolyamnak a félév alatt, hogy a második választás legyen a kedvezőbb? (Az eredményt két tizedes jegyre kerekítve adja meg.)

(A tőkésítés melletti befektetés azt jelenti, hogy a tőkésítési időszak alatt elért kamatot az időszak végén hozzáadják az időszak kezdetén befektetett tőkéhez, és a következő időszakban az így kapott, kamattal megnövelt összeg után számítják a kamatot. Ez a folyamat annyiszor ismétlődik, ahány tőkésítési időszak van a befektetés időtartama alatt.)

1005/3

3. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 91. A hatodik, a hetedik és a nyolcadik tag összege 2912. Hány tizenhárom-jegyű tagja van a sorozatnak?

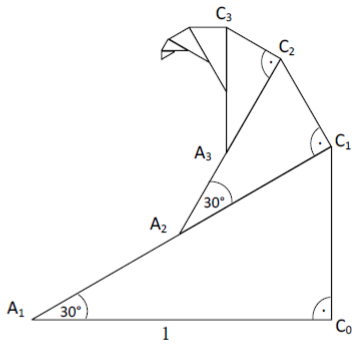
1105/5

5. Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az A_1 csúcsnál 30°-os szög van, az A_1C_0 befogó hossza 1, az A_1C_1 átfogó felezőpontja A_2.

Az A_2C_1 szakasz „fölé” az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzoljuk az ábra szerint. Az A_2C_2 átfogó felezőpontja A_3.

Az A_3C_2 szakasz „fölé” az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzoljuk.

Ez az eljárás tovább folytatható.



a) Számítsa ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét (az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe)!

b) Igazolja, hogy a $C_0C_1C_2\ldots C_n$ töröttvonal hossza minden pozitív egész n-re kisebb, mint 1,4.

1110/2

2. Az ENSZ 1996-ban megjelent táblázatának egy részlete a nyolc legnagyobb népességszámú ország népességi adatait tartalmazza 1988-ban, és egy népesedésdinamikai modell előrejelzése alapján 2050-ben.

	1988		2050 (előrejelzés)	
Sorrend	**Ország**	**Népességszám (millió fő)**	**Ország**	**Népességszám (millió fő)**
1	Kína	1255	India	1533
2	India	976	Kína	1517
3	Egyesült Államok	274	Pakisztán	357
4	Indonézia	207	Egyesült Államok	348
5	Brazília	165	Nigéria	339
6	Oroszország	148	Indonézia	318
7	Pakisztán	147	Brazília	243
8	Japán	126	Banglades	218

(World Population Prospects: The 1996 Revision)

Feltételezzük, hogy Pakisztán lakossága 1988 és 2050 között minden évben ugyanannyi százalékkal nő, mint amennyi százalékkal az előző évben növekedett.

a) Ezzel a feltételezéssel élve – millió főre kerekítve – hány lakosa lesz Pakisztánnak 2020-ban? (Az évi százalékos növekedés két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon!)

1205/02

2. A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma $\frac{4}{3}$-szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapatnak kiosztott pontok száma összesen 139.

a) Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot!

1210/06

6. A Robotvezérelt Elektromos Kisautók Nemzetközi Versenyén a versenyzők akkumulátorral hajtott modellekkel indulnak. A magyar versenyautó az első órában 45 kilométert tesz meg. Az akkumulátor teljesítményének csökkenése miatt az autó a második órában kevesebb utat tesz meg, mint az első órában, a harmadik órában kevesebbet, mint a másodikban, és így tovább: az indulás utáni n-edik órában megtett útja mindig 95,5%-a az $(n-1)$-edik órában megtett útjának ($n \in \mathbf{N}$ és $n > 1$).

a) Hány kilométert tesz meg a 10. órában a magyarok versenyautója? Válaszát egész kilométerre kerekítve adja meg!

A versenyen több kategóriában lehet indulni. Az egyik kategória versenyszabályai lehetővé teszik az akkumulátorcserét verseny közben is. A magyar csapat mérnökei kiszámították, hogy abban az órában még nem érdemes akkumulátort cserélni, amelyikben az autó legalább 20 km-t megtesz.

b) Az indulástól számítva legkorábban hányadik órában érdemes akkumulátort cserélni?

A „Végkimerülés" kategóriában a résztvevők azon versenyeznek, hogy akkumulátorcsere és feltöltés nélkül mekkora utat tudnak megtenni az autók. A világrekordot egy japán csapat járműve tartja 1100 km-rel.

c) Képes-e megdönteni a magyar versenyautó a világrekordot a „Végkimerülés" kategóriában?

1305/06b

6. Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belső négyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5:7.

a) Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg!

A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is 5 : 7. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismételjük.

b) Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek?

1310/07

7. Az *ABCDEF* szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$.

a) Számítsa ki a hatszög területének pontos értékét!

b) Az *ABCDEF* hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)$ határértéket! (Pontos értékekkel számoljon!)

1510/01a

1. Egy olajkút meghibásodása miatt a tenger felületén összefüggő olajfolt keletkezett. A szakemberek műholdak segítségével 15 percenként megmérték a folyamatosan növekvő olajfolt területét, és úgy tapasztalták, hogy az minden alkalommal 2%-kal nagyobb, mint az előző érték volt.

a) Ha az első megfigyeléskor 400 m^2 volt az olajfolt kiterjedése, akkor mekkora lesz a területe egy nap múlva?

A sérült olajkutat végül sikerült elzárni, így az olajfolt területének növekedése megállt. Ekkor kezdték meg az olajszennyezés eltávolítását. A környezetvédelmi hatóság a 12 400 m^2 területű olajfolt megszüntetésére 31 napos határidőt szabott meg. Az első napon még csak 130 m^2-ről sikerült eltávolítani az olajfoltot (így a területe 12 270 m^2 lett), de a teljesítményt növelni tudták: az egy nap alatt megtisztított terület mérete minden nap ugyanakkora értékkel nőtt.

1705/7a

7. Egy baktériumtenyészet szaporodását laboratóriumi körülmények között vizsgálják. Az első órában 4 mikrocellát fertőznek meg baktériumokkal. A második órában a baktériumok szaporodni kezdenek, így további 3 cella fertőződik meg. A megfigyelés szerint ezután „szabályszerűvé" válik a baktériumok szaporodása: minden órában annyi új fertőzött cella keletkezik, ahány korábban összesen volt. (A harmadik órában 4 + 3 = 7 új fertőzött mikrocella keletkezik, a negyedik órában 14, és így tovább.)

a) Ha a baktériumok szaporodásához továbbra is biztosítanák a megfelelő körülményeket, akkor az összes fertőzött mikrocella száma hányadik órában haladná meg a tízmilliót?

1710/5ab

5. A laptopokban is használt B típusú lítiumion-akkumulátorok töltéskapacitása minden teljes töltési ciklusnál az előző értékének körülbelül 0,06%-ával csökken.

a) Hány százalékkal csökkent az új akkumulátor töltéskapacitása, ha 350 teljes töltési ciklust végeztek vele?

Egy B típusú akkumulátorral minden évben körülbelül 200 teljes töltési ciklust végeznek. (Tételezzük fel, hogy két töltési ciklus között mindig ugyanannyi idő telik el.)

b) Mennyi a felezési ideje a kezdetben új akkumulátor töltéskapacitásának (azaz töltési kapacitása mennyi idő alatt csökken a felére)?

1810/01a

1. **a)** Egy mértani sorozat hányadosa $\frac{1}{4}$, a sorozat első öt tagjának összege 852,5. Határozza meg a sorozat első tagját! Számításai során ne használjon közelítő értéket!

1905/02a

2. **a)** Egy mértani sorozat negyedik tagja 12, a kilencedik tagja 384.
Számítsa ki a sorozat első hat tagjának az átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését!

1910/07a

7. **a)** Igazolja, hogy nincs olyan 2-nél nagyobb n egész szám, melyre $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ és $\binom{n}{3}$ (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai!

2005/01b

A $\{b_n\}$ mértani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, a második és negyedik tagjának összege pedig 130.

b) Adja meg a sorozat ötödik tagját!

2010/04a

4. Ha András az asztalra ejti a pingponglabdáját, akkor a labda az ejtési magasság kb. 84%-ára pattan vissza. Ezután tovább pattog úgy, hogy minden asztalra érkezés után az előző felpattanás magasságának 84%-áig emelkedik fel.

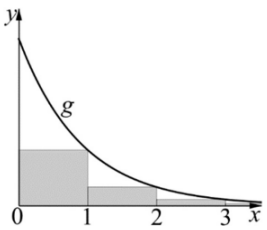
a) András egy alkalommal (az asztal lapjától mérve) 1 méter magasságból ejtette az asztalra a pingponglabdát. Mekkora utat tesz meg összesen a pingponglabda az első asztalra érkezésétől a tizenötödikig? (Feltételezzük, hogy a labda csak függőleges irányban mozog, a vízszintes irányú elmozdulása elhanyagolható.)

2205/02b

b) Egy **mértani** sorozat első és második tagjának összege 6, harmadik és negyedik tagjának összege pedig 96. Adja meg a sorozat első tagját és hányadosát!

2210/07c

A koordinátatengelyek és a $g(x) = 3^{-x}$ $(x \geq 0)$ függvény grafikonja által határolt tartományba olyan egymáshoz csatlakozó téglalapokat írunk, amelyek egyik oldala az x-tengelyen van és egységnyi hosszúságú, egyik csúcsa pedig a g függvény grafikonjára illeszkedik.
Az első beírt téglalap egyik csúcsa az origó, ezzel szemközti csúcsa pedig az $(1; g(1))$ pont. A további téglalapok egy-egy csúcsa rendre $(2; g(2))$, $(3; g(3))$, és így tovább, az ábra szerint (az ábra nem méretarányos).



Legyen n az a legnagyobb pozitív egész szám, amelyre $g(n) - g(n+1) > 10^{-6}$ teljesül.

c) Számítsa ki az első n téglalap területének összegét!

2305/04b

Egy mértani sorozat első tagja 3, és hányadosa is 3. A sorozat első n tagjának **szorzata** 3^{435}.

b) Számítsa ki n értékét!

Négyzetgyökös egyenlet

0805/2

2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}=2$$

0905/5b

b) $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$

1010/1b

b) Az alábbi f és g függvényt is a $[-3;6]$ intervallumon értelmezzük.
$f(x)=\sqrt{x+3}$ és $g(x)=-0{,}5x+2{,}5$.
Ábrázolja közös koordinátarendszerben az f és a g függvényt a $[-3;6]$ intervallumon!
Igazolja számolással, hogy a két grafikon metszéspontjának mindkét koordinátája egész szám!

1310/01a

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\sqrt{x+2}=-x$

1605/05b

b) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+10}-1$

1905/03b

b) $\sqrt{6x-24}=\sqrt{2x-7}-1$

2105/01a

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{-2x+6}=x+1$

Négyzetgyökös egyenlőtlenség

1010/1c

c) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
$0{,}5x+\sqrt{x+3}\le 2{,}5$

1105/1

2. Legyen $A=\left\{x\in\mathbf{R}\;\middle|\;\sqrt{x-1}\ge\sqrt{5-x}\right\}$ és $B=\left\{x\in\mathbf{R}\;\middle|\;\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)>-2\right\}$.
Adja meg az $A\cup B$, $A\cap B$, $B\setminus A$ halmazokat!

1910/02b

2. Oldja meg az alábbi két egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $\cos x\ge\frac{1}{2}$ **b)** $\sqrt{\frac{x}{5}-4}<20$

Síkgeometria

0505/9

9. Az ABC háromszög oldalai $AB = 42$, $BC = 40$ és $CA = 26$. Írjunk téglalapot a háromszögbe úgy, hogy a téglalap egyik oldala illeszkedjen a háromszög AB oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög CA, illetve BC oldalára essen. Tekintsük az így beírható téglalapok közül a legnagyobb területűt! Mekkorák ennek a téglalapnak az oldalai?

0602/5

5. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és CD, és $AB > CD$. A trapéz átlóinak metszéspontja K. Az ABK háromszög AB oldalához tartozó magassága kétszerese a CDK háromszög CD oldalához tartozó magasságának. Jelölje T az ADK háromszög területét. Hányszorosa az $ABCD$ trapéz területe T-nek?

0602/8a

8. Kartonpapírból kivágtunk egy 1,5 dm magasságú ABC szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húztunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyiktől ugyanakkora, 0,5 deciméternél kisebb x távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.
a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét x függvényében!

0605/9

9. Az $ABCDA'B'C'D'$ téglatestben úgy jelöltük a csúcsokat, hogy az $ABCD$ alaplappal egybevágó lapon az A' csúcsot az A-val, a B' csúcsot a B-vel, a C' csúcsot a C-vel, a D' csúcsot a D-vel kösse össze él. Tudjuk, hogy a DAD' szög 45°-os, a BAB' szög 60°-os.

a) Mekkora a $B'AD'$ szög koszinusza?

b) Mekkora az $AB'A'D'$ tetraéder térfogata, ha a téglatest legrövidebb éle 10?

c) Mekkora az $AA'D'$ és az $AB'D'$ síkok hajlásszöge?

0610/7

7. Egy húrnégyszög három szögéről tudjuk, hogy mértékük aránya 7 : 6 : 8.

a) Mekkorák a húrnégyszög szögei?

Matematika órán, miután minden diák megoldotta a feladatot, három tanuló a következőket állította:

Zsófi: A húrnégyszög minden szöge egész szám.
Peti: A húrnégyszögnek van derékszöge.
Kata: A húrnégyszög egyik szöge 110°-nál is nagyobb.

b) A három tanuló állítása közül melyik igaz a feltételnek megfelelő húrnégyszögre?

0705/2ab

2. Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 18 cm, a CA befogójának hossza 6 cm.

a) Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

A BC befogó egy P belső pontját összekötjük az A csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$.

b) Milyen hosszú a PB szakasz?

0710/2

2. Egy családnak olyan téglalap alakú telke van, melynek két szomszédos oldala 68 m, illetve 30 m hosszú. A telek egyik sarkánál úgy rögzítettek egy kerti locsoló berendezést, hogy a telek rövidebb oldalától 4 m-re, a vele szomszédos oldaltól 3 m-re legyen. A locsoló berendezés körbe forgó locsolófeje azt a részt öntözi, amely a rögzítés helyétől legalább 0,5 m-re, de legfeljebb 4 m-re van. A telek mekkora területű részét öntözi a locsoló berendezés, és ez hány százaléka a telek területének?

0710/5

5. Az ABC háromszög körülírt körének sugara 26 cm, $BAC\angle = 60°$.

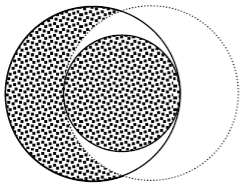
a) Számítsa ki a BC oldal hosszát!

b) Hány fokos a háromszög másik két szöge, ha az AC oldal b cm, az AB oldal pedig $3b$ cm hosszúságú?

A keresett értékeket egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!

0805/9

9. Klári teasüteményt sütött. A meggyúrt tésztát olyan „téglatest” alakúra nyújtotta ki, amelynek a felülről látható lapja 30 cm × 60 cm méretű téglalap.
Majd egy henger alakú szaggatóval (határoló körének sugara 3 cm) „körlapokat” vágott ki a tésztából.
Ezután a körlapokból először „holdacskákat” vágott le úgy, hogy a szaggató határoló körének középpontját a már kivágott körlap középpontjától 2 cm távolságra helyezte el, és így vágott bele a körlapba. (Minden bevágásnál csakis egy körlapot vágott ketté.)



Miután minden körlapból levágott egy „holdacskát”, a körlapokból visszamaradt részek mindegyikéből – egy másik szaggatóval – kivágott egy-egy lehető legnagyobb körlap alakú süteményt.

a) Hány cm^2 területű egy „holdacska” felülről látható felülete? (Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!)

Klári a „holdacskák” és a kis körlapok elkészítése után visszamaradt tésztát ismét összegyúrta, majd ugyanolyan vastagságúra nyújtotta ki, mint az első esetben, de most négyzet alakú lett a kinyújtott tészta.

b) Hány cm hosszú ennek a négyzetnek az oldala, ha Klári a 30 cm × 60 cm-es téglalapból eredetileg 50 darab 3 cm sugarú körlapot szaggatott ki? (Az eredményt egészre kerekítve adja meg!)

0810/4

4. Az ABC háromszögben $AB = 2$, $AC = 1$, a BC oldal hossza pedig megegyezik az A csúcsból induló súlyvonal hosszával.

a) Mekkora a BC oldal hossza? A hossz pontos értékét adja meg!

b) Mekkora a háromszög területe? A terület pontos értékét adja meg!

0905/8

8. A K középpontú és R sugarú kört kívülről érinti az O középpontú és r sugarú kör ($R>r$). A KO egyenes a nagy kört A és E, a kis kört E és D pontokban metszi. Forgassuk el a KO egyenest az E pont körül α hegyesszöggel! Az elforgatott egyenes a nagy kört az E-től különböző B pontban, a kis kört C pontban metszi.

a) Készítsen ábrát! Igazolja, hogy az $ABDC$ négyszög trapéz!

b) Igazolja, hogy az ABC háromszög területe $t = R \cdot (R + r) \cdot \sin 2\alpha$!

c) Mekkora α szögnél lesz az ABC háromszög területe maximális, adott R és r esetén?

0910/2

2. István örömmel mesélte Péter barátjának, hogy egy négyszög alakú telket vett, amire majd házat akar építeni. Elmondása szerint a négyszög egyik szöge derékszög, és az ezt közrefogó mindkét oldal 20,0 m hosszú. A telek másik két oldala is egymással egyenlő hosszú, ezek 120°-os szöget zárnak be.

a) Hány méter hosszú drót szükséges az üres telek bekerítéséhez?

„Mekkora házat szeretnél rá építeni?" – kérdezte Péter.
„Négyzet alapú sarokházat, és körülbelül 100 m^2 alapterületűt. Úgy gondoltuk a párommal, hogy a házat a derékszögű sarokba építtetjük" – válaszolt István.
„Ha jól képzelem el a telek alakját, akkor az nagyon furcsa alakú lehet. Oda még egy kis faház sem fér el" – szólt nevetve Péter.

b) Rajzolja le, hogy milyen alakú az István által megvett telek, és milyennek képzelte el Péter!

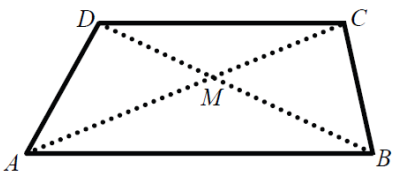
c) Legfeljebb mekkora alapterületű, négyzet alapú sarokház férne el a telek derékszögű sarkába az egyik és mekkora a másik esetben? (Válaszát m^2-re kerekítve adja meg!)

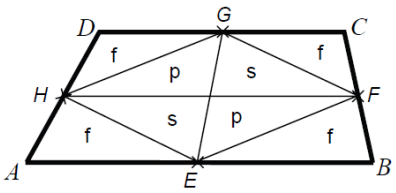
1005/9

9. Egy 90 m² területű, trapéz alakú virágágyás párhuzamos oldalainak aránya $AB : DC = 3 : 2$. Az ágyást tavasszal és ősszel is az évszaknak megfelelő virágokkal ültetik be. Mindkét alkalommal mindegyik fajta virágból átlagosan 50 virágtövet ültetnek négyzetméterenként.

Tavasszal az átlókkal kijelölt négy háromszögre bontották a virágágyást. Az *ABM* háromszögbe sárga virágokat, a *DMC* háromszögbe fehéret, a maradék két részbe piros virágokat ültettek.

a) A tavaszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek be?



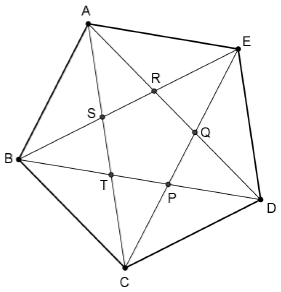


Ősszel a másik ábra alapján tervezték meg a virágok elhelyezését. (Az *E*, *F*, *G* és *H* pontok a trapéz oldalainak felezőpontjai.) Ekkor is fehér (f), piros (p) és sárga (s) virágokat ültettek a tervrajz alapján.

b) Az őszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek?

1010/6ab

6. Megrajzoltuk az *ABCDE* szabályos ötszöget, és berajzoltuk minden átlóját. Az átlók metszéspontjait az ábra szerint betűztük meg: *P, Q, R, S, T*.



a) Hány olyan háromszög látható az ábrán, amelynek mindhárom csúcsa a megjelölt 10 pont közül való, és mindhárom oldalegyenese az *ABCDE* ötszög oldalegyenesei és átlóegyenesei közül kerül ki?

Hány lényegesen különböző háromszög van ezek között, ha az egymáshoz hasonló háromszögeket nem tekintjük lényegesen különbözőknek?

b) Tudjuk, hogy az *ABCQ* négyszög területe 120 cm^2. Mekkora az *ABCDE* ötszög területe? Válaszát egész értékre kerekítve adja meg!

1205/09

9. **a)** Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát!

b) Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazolja, hogy a háromszögnek nincs 60°-os szöge!

1210/04

4. A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést!

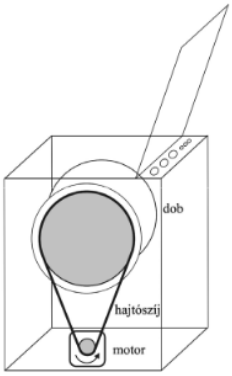
Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a **tengerjáró hajót**, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg!

Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el!

1305/02

2. Az ábrán egy mosógép vázlatos rajza látható. A kisebb, 1 cm sugarú kerék a motor tengelyéhez kapcsolódik, és egy hajtószíj segítségével forgatja meg a mosógép dobjához rögzített, 20 cm sugarú kereket, amitől a dob és benne a ruhák forognak mosás közben. A két kerék tengelye párhuzamos, a tengelyek távolsága 46 cm. (A hajtószíj a tengelyekre merőleges síkban van.) Milyen hosszú a feszes hajtószíj?



1305/06

6. Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belső négyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5 : 7.

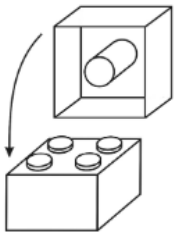
a) Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg!

A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is 5 : 7. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismételjük.

b) Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek?

1305/08a

8. Egy építőkészletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építőelem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja. (Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm, az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm.



a) Mekkora a nagyobb henger átmérője?
Válaszát milliméterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

1310/02

2. Egy 15°-os emelkedési szögű hegyoldalon álló függőleges fa egy adott időpontban a hegyoldal emelkedésének irányában 3 méter hosszú árnyékot vet. Ugyanebben az időpontban a közeli vízszintes fennsíkon álló turista árnyékának hossza éppen fele a turista magasságának. Hány méter magas a fa?
Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

1310/07

7. Az $ABCDEF$ szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$.

a) Számítsa ki a hatszög területének pontos értékét!

b) Az $ABCDEF$ hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1+t_2+\ldots+t_n)$ határértéket! (Pontos értékekkel számoljon!)

1405/01

1. **a)** Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe 2025 cm^2?

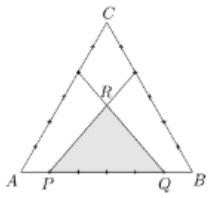
1405/06b

Vízszintes, sík terepen futó patak túlpartján álló fa magasságát kell meghatároznunk. A síkra merőlegesen álló fát megközelíteni nem tudjuk, de van egy kisméretű, digitális műszerünk, amellyel szöget és távolságot is pontosan tudunk mérni. A patakparton kitűzzük az A és B pontokat, amelyek 10 méterre vannak egymástól. Az A pontból 55°-os, a B-ből 60°-os emelkedési szög alatt látszik a fa teteje. Szögméréssel még megállapítjuk, hogy $ATB\sphericalangle = 90°$, ahol T a fa „talppontja”.

b) Milyen magas a fa?

1410/06b

Az egyenlő oldalú ABC háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a PQR háromszöget.



b) Számítsa ki a PQR háromszög területének pontos értékét!

1505/2

2. Egy televíziókészülék termékleírásában szereplő „16:9-es típus” azt adja meg, hogy mennyi a téglalap alakú tv-képernyő két szomszédos oldalhosszának aránya, a „40 colos” jellemző pedig a képernyő átlójának a hosszát adja meg col-ban (1 col ≈ 2,54 cm).

a) Számítsa ki a 40 colos, 16:9-es képernyő oldalainak hosszát!
Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

b) Két 16:9-es képernyő közül az elsőnek 69%-kal nagyobb a területe, mint a másodiknak. Hány százalékkal nagyobb az első képernyő átlója, mint a másodiké?

1505/8ab

8. **a)** Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz!

b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

1510/02

2. A fénymásoló gépekhez is használt téglalap alakú papírlapok mindegyikének olyan a méretezése, hogy a hosszabb és a rövidebb oldal aránya (megközelítőleg) $\sqrt{2}$. Ezt a számot röviden a téglalap alakú papírlap *méretarányának* is nevezik.

a) Mutassa meg, hogy ha egy $\sqrt{2}$ méretarányú papírlapot félbevágunk úgy, hogy a vágási él merőleges a papírlap hosszabb oldalára, akkor az így keletkező két egybevágó papírlap ugyancsak $\sqrt{2}$ méretarányú lesz!

A szabványos papírlapok méretét egy nagybetűvel és a betű után írt természetes számmal jelölik (például A0, A1, B5). Az A0-s papírlap méretaránya $\sqrt{2}$, a területe pedig éppen 1 m^2.

b) Számítsa ki az A0-s papírlap oldalainak hosszát egész milliméterre kerekítve!

Ha az A0-s papírlapot a hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A1-es papírlapot kapunk. Ha az A1-es papírlapot a hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A2-es papírlapot kapunk. Az eljárást tovább folytatva kapjuk az A3-as, A4-es, A5-ös papírlapokat. A leggyakrabban használt irodai másolópapír A4-es méretű és „80 g-os". A „80 g-os" jelzés azt jelenti, hogy 1 m^2 területű másolópapír tömege 80 gramm.

c) Egy csomagban 500 darab A4-es, „80 g-os" papírlap van. Hány kg egy ilyen csomag tömege, ha a csomagolóanyag tömege 20 g?

1510/09

9. Egy kör középpontja egy derékszögű háromszög b hosszúságú befogójára illeszkedik. A kör érinti a c hosszúságú átfogót és az a hosszúságú befogó egyenesét is. Andrea és Petra egymástól függetlenül kifejezték a kör sugarának hosszát a háromszög oldalainak hosszával. Andrea szerint a kör sugara $R_A = \frac{ab}{a+c}$, Petra szerint pedig $R_P = \frac{ac-a^2}{b}$.

a) Igazolja, hogy $R_A = R_P$!

b) Bizonyítsa be, hogy Andrea képlete helyes!

Egy derékszögű háromszög oldalai $a = 8$ cm, $b = 6$ cm és $c = 10$ cm. Megrajzoljuk azt a két kört, melyek középpontja a háromszög egyik, illetve másik befogójára illeszkedik, és amelyek érintik a háromszög másik két oldalegyenesét.

c) Számítsa ki, hogy a két körnek a háromszög belsejébe eső M metszéspontja milyen messze van a derékszögű C csúcstól!

1605/04

4. **a)** A $PQRS$ húrnégyszöget a PR és a QS átlók megrajzolásával négy háromszögre bontottuk. Igazolja, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz!

Az $ABCD$ húrnégyszög AB oldala a négyszög körülírt körének egyik átmérője.
A négyszög BC oldala 3 cm, a CD oldala 5 cm hosszú, továbbá $BCD\angle = 120°$.

b) Számítsa ki a négyszög BD átlójának, AB oldalának és AD oldalának hosszát, valamint a négyszög többi szögét!

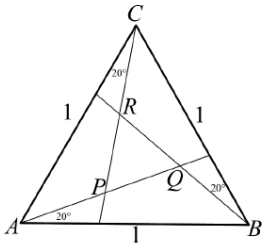
1705/3a

3. **a)** Az $ABCD$ négyzet körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amelyik nem csúcsa a négyzetnek. Bizonyítsa be, hogy $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.

1705/8ab

8. **a)** *Ha egy háromszög szabályos, akkor a körülírt körének középpontja megegyezik a beírt körének középpontjával.*
Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és igazolja, hogy a megfordított állítás is igaz!

Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszög minden csúcsánál belúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az ábrán látható PQR szabályos háromszöget kaptuk.



b) Számítsa ki a PQR háromszög oldalának hosszát!

1805/1

1. Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 9 cm és 11 cm.

a) Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű!

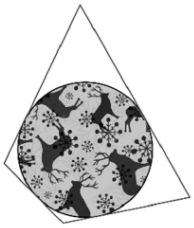
Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja.

b) Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya 3 : 4 : 5.

c) Ennek a derékszögű háromszögnek a területe 121,5 cm^2. Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát!

1805/7c

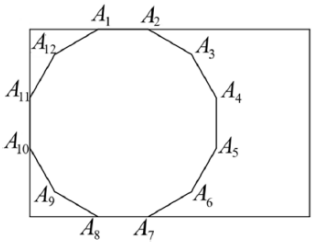
A gyerekek másfajta díszeket is készítettek úgy, hogy színes kartonlapra nyomtatott kör alakú képeket négy-négy egyenes vágással vágtak körül. Az egyik ilyen módon kapott érintőnégyszög alakú függődísz oldalainak hossza (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat négy szomszédos tagja. A négyszög egyik oldala 23 cm, a kerülete pedig 80 cm.



c) Mekkora lehet a négyszög másik három oldalának hossza?

1810/03a

3. Egy nagy méretű, köztéren felállítandó óra számlapját szabályos 12-szög alakúra tervezik. Az $A_1A_2\ldots A_{12}$ számlapot egy 260 cm × 180 cm-es téglalap alakú alumíniumlemezből vágják ki az ábra szerint.



a) Mekkora tömegű az óralap, ha az alumíniumlemez vastagsága 2 mm, és 1 m^3 alumínium tömege 2700 kg?

1810/06ab

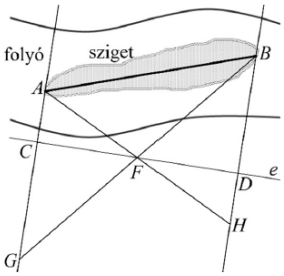
6. **a)** Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszait indokolja!

I. Ha egy trapéznak 2-2 szöge egyenlő, akkor a trapéz húrtrapéz.
II. Ha egy háromszögben $a = b$, akkor $\sin 3\alpha = \sin 3\beta$.
(A háromszög oldalai a, b és c, a velük szemközti szögek rendre α, β és γ.)

b) Fogalmazza meg a II. állítás megfordítását, és a megfordított állításról is döntse el, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

1810/07c

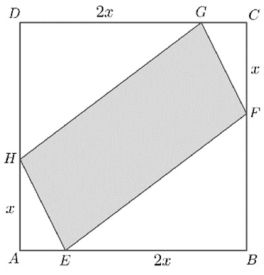
Thalész, a hét görög bölcs egyike, egy nevezetes, neki tulajdonított mérés során egy folyóban lévő sziget AB hosszát a folyóparton maradva határozta meg.
Először felvett egy e egyenest a parton. Ezen az e egyenesen megkereste azt a C, illetve D pontot, amelyekben a CA, illetve a DB irány merőleges az e egyenesre. Ezután a CD szakasz F felezőpontját is megjelölte egy jelzőkaróval. Ezt követően az AC egyenesen haladva megjelölte azt a G pontot, amelyre B, F és G egy egyenesre illeszkedik; és hasonlóan az AF és BD egyenesek H metszéspontját is megjelölte. Thalész azt állította, hogy a sziget hossza a GH távolsággal egyezik meg.



c) Igazolja Thalész állításának helyességét!

1905/01

1. Az $ABCD$ négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az *ábrán* látható módon az $EFGH$ paralelogrammát írjuk. Az AH és a CF szakasz hossza x méter, a BE és a DG szakasz hossza $2x$ méter ($0 < x < 2$).



a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma területe (m^2-ben mérve): $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$.

b) Határozza meg az x értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen!

c) Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha $x = 1{,}25$.

1910/05

5. **a)** Döntse el, hogy igaz-e a következő állítás! Válaszát indokolja!

Ha egy háromszög két magassága egyenlő hosszúságú, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$, $b = \sqrt{27}$ és $\beta = 2\alpha$.

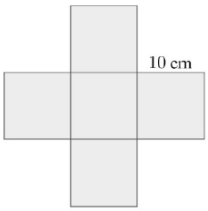
b) Számítsa ki a háromszög szögeit!

Az egységnyi oldalú, szabályos ABC háromszögbe olyan $PQRS$ téglalapot írunk, melynek PQ oldala az AB oldalra illeszkedik, R a BC oldal pontja, S pedig a CA oldalé.

c) Határozza meg a $PQRS$ téglalap területének maximális értékét!

2005/03a

3. A mellékelt ábrán egy kereszt alakú lemez látható, amely 5 db 10 cm oldalú négyzetből áll. A lemezből egy 10 cm alapélű, szabályos négyoldalú gúla hálóját szeretnénk kivágni úgy, hogy a középső négyzet legyen a gúla alaplapja.



a) Igazolja, hogy a lehetséges hálók kivágása során keletkező hulladék legalább 200 cm^2, de kevesebb 300 cm^2-nél!

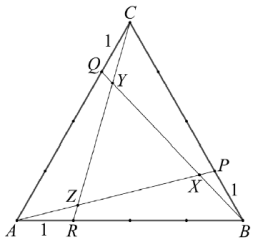
2005/07a

7. Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB = 20$, $BC = 18$, $ABC\sphericalangle = 70°$, $CAD\sphericalangle = 50°$.

a) Milyen hosszú a CD oldal, és mekkora a húrnégyszög területe?

2010/09b

Jelölje a 4 egység oldalú ABC szabályos háromszög BC oldalának B-hez közelebbi negyedelőpontját P, a CA oldal C-hez közelebbi negyedelőpontját Q, az AB oldal A-hoz közelebbi negyedelőpontját pedig R. Jelölje továbbá AP és BQ szakaszok metszéspontját X, BQ és CR szakaszok metszéspontját Y, végül CR és AP szakaszok metszéspontját Z.



b) Határozza meg az XYZ háromszög területét!

2105/02a

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB = 50$ m, $BC = 60$ m, $CD = 70$ m, továbbá $BAD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 100{,}3°$.

a) Számítsa ki a négyszög területét!

2110/04b

A konferencia épülete egy háromszög alakú területen van. Ha a háromszög csúcsai A, B és C, akkor $AB = AC = 130$ méter, és $BC = 100$ méter. A háromszög alakú területet kettéosztja az egyenes CD kerítés úgy, hogy a BCD háromszög alakú rész területe 2000 m^2. (D az AB oldalon van.)

b) Milyen hosszú a CD kerítés?

2110/06a

6. Az ókori egyiptomiak az egyenlő szárú háromszög területét (közelítő módszerrel) úgy számolták ki, hogy az alap és a szár szorzatának a felét vették.[1]

a) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm hosszú. Mekkora lehet a szára, ha az ókori egyiptomiak módszere e háromszög valódi területét 25%-nál kisebb hibával adja meg?

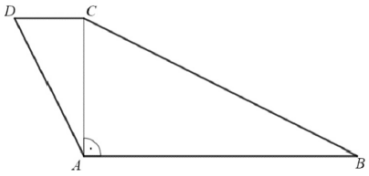
2205/03b

A társasház kertje egy 15 méter hosszú, 10 méter széles téglalap alakú földterület, amely az egyik átlója mentén ketté van osztva: az egyik fele füvesítve van, a másik felén virágágyás található. A füvesített rész derékszögű csúcsában van egy öntöző, amely egy 10 méter sugarú negyedkör alakú területet locsol a kertben.

b) Mekkora az a füvesített terület, amelyet nem ér el az öntöző?

2305/03

3. Az ábrán látható trapéz alakú kert alapjainak hossza: $AB = 36$ m, $CD = 8$ m. A 11 méter hosszú AC átló merőleges a trapéz alapjaira.



a) Mekkora a kert kerülete és területe?

A kert tulajdonosa egy 10 cm átmérőjű, henger alakú kutat fúratott a kertben.

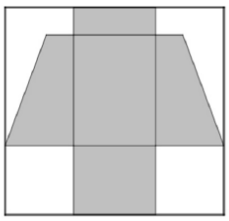
b) Hány méter mély lett a kút, ha a térfogata 0,1 köbméter?

Az e egyenes párhuzamos a fenti $ABCD$ trapéz alapjaival, és az AD szárat az E pontban, a BC szárat pedig az F pontban metszi. Az AC átló felezi az EF szakaszt.

c) Az A ponttól mekkora távolságra metszi az e egyenes az AC átlót?

2305/06b

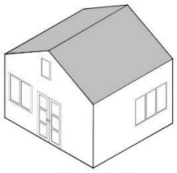
A test kiterített hálóját az ábra sötétített tartománya szemlélteti. Ezt a hálót egy 15 cm × 16 cm-es téglalapból vágjuk ki (ennek oldalai párhuzamosak a test 8 cm × 6 cm-es alaplapjának oldalaival).

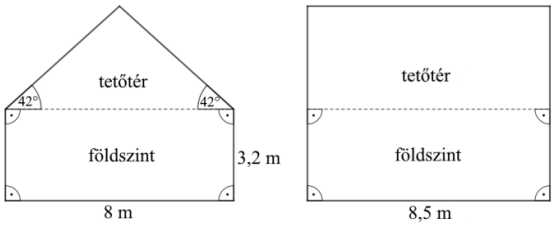


b) Hány százalék hulladék keletkezik?

2310/02a

2. Egy családi ház egy téglatest alakú földszinti részből és a rá illeszkedő, háromoldalú egyenes hasáb alakú tetőtérből áll. A ház néhány méretét elölnézetben és oldalnézetben mutatja az alábbi ábra. (A falvastagságtól mindenütt eltekintünk.)


illusztráció

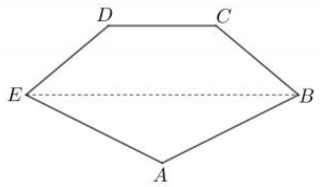


Az ábrán megadott méretek alapján számolva válaszoljon az alábbi kérdésekre!

a) A teljes tetőfelületet cseréppel fedik. Mekkora ez a felület? Válaszát m^2-ben, egészre kerekítve adja meg!

2310/05ab

5. Az $ABCDE$ konvex ötszögben $AB = AE = 20$ cm és $BC = CD = DE$. A $BCDE$ négyszög egy húrtrapéz, amelynek a B-nél fekvő belső szöge 40°-os. Az A csúcs és az EB átló távolsága 10 cm.

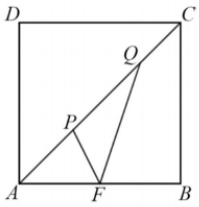


a) Mekkorák az ötszög (belső) szögei?

b) Mekkora az ötszög területe?

2405/04

4. Az ábrán látható $ABCD$ négyzet AC átlóját a P és a Q pont három szakaszra bontja, mégpedig úgy, hogy $AP : PQ : QC = 4 : 5 : 3$ teljesül. Jelölje F a négyzet AB oldalának felezőpontját.



a) Határozza meg, hogy az AFQ háromszög területe hányadrésze az $ABCD$ négyzet területének!

A négyzet oldala 24 egység hosszú.

b) Igazolja, hogy az FPQ háromszögben $FP = 4\sqrt{5}$ és $QF = 6\sqrt{10}$.

c) Igazolja, hogy az AFQ háromszög és az FPQ háromszög hasonló!

Statisztika

0505/8

8. Az alábbi táblázat egy ország munkaképes lakosságának foglalkoztatottság szerinti megoszlását mutatja. Az adatok ezer főre kerekítettek.

	Ágazatok	2003. év *(ezer fő)*	2004. év *(ezer fő)*
Foglalkoztatottak	Mezőgazdaságban dolgozó	1020	
	Iparban dolgozó	1870	1926
	Szolgáltatásban dolgozó	5015	
Munkanélküli		595	
Munkaképes lakosság összesen		8500	

2004-ben

- az ország munkaképes lakosságának száma 3 ezrelékkel nőtt 2003-hoz képest,
- a munkanélküliek aránya a munkaképes lakosságban változatlan maradt,
- a szolgáltatásban dolgozók száma a 2003-ban ott dolgozók számának 2%-ával megnőtt.

a) Számítsa ki a táblázat hiányzó adatait (ezer főre kerekítve)!

b) Ábrázolja kördiagramon a foglalkoztatottak ágazatok szerinti megoszlását 2003-ban!

c) Hány százalékkal változott a mezőgazdaságban dolgozók száma 2004-re a 2003-as állapothoz képest? Nőtt vagy csökkent?

0510/6ab

6. A következő táblázat egy 30 fős kilencedik osztály első félév végi matematikaosztályzatainak megoszlását mutatja.

Érdemjegy	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Tanulók száma	4	7	9	8	2

a) Ábrázolja az érdemjegyek eloszlását oszlopdiagramon!

b) Mennyi a jegyek átlaga?

0510/8c

8. **a)** Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsőn az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult.
Hány tanulója van az osztálynak?

c) A második kirándulásra csak az osztály kosárlabdázó tanulói nem tudtak elmenni, mivel éppen mérkőzésük volt. A kosarasok átlagmagassága 182 cm, az osztály átlagmagassága 174,3 cm.
Számítsa ki a kiránduláson részt vevő tanulók átlagmagasságát!

0605/7

7. A világhírű GAMMA együttes magyarországi koncertkörútja során öt vidéki városban lépett fel. Az alábbi táblázat tartalmazza a körút néhány üzleti adatát.

város	fizető nézők száma	egy jegy ára (Ft)	bevétel a jegyeladásból (ezer Ft)
Debrecen	12350		14820
Győr	8760		12264
Kecskemét		1600	22272
Miskolc	9970	1500	
Pécs		1300	15405

a) A koncertturné során melyik városban adták el a legtöbb jegyet?
b) Mennyi volt az összes eladott jegy átlagos ára?

Bea elment Budapesten a GAMMA együttes koncertjére, és becslése szerint ott 50 000 ember hallgatta a zenét. Peti Prágában volt ott az együttes koncertjén, ahol a nézők számát 60 000 főre becsülte. A GAMMA együttes menedzsere, aki ismerte a tényleges nézőszámokat, elárulta, hogy:

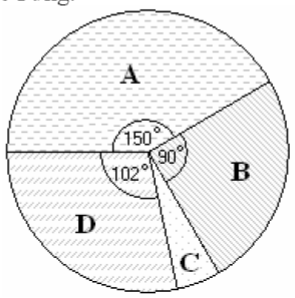
- Budapesten a tényleges nézőszám nem tér el 10 %-nál többel a Bea által adott becsléstől.
- Peti becslése nem tér el 10 %-nál többel a tényleges prágai nézőszámtól.

c) Mekkora a budapesti nézőszám és a prágai nézőszám közötti eltérés lehetséges legnagyobb értéke, a kerekítés szabályainak megfelelően ezer főre kerekítve?
d) A fenti adatok ismeretében előfordulhatott-e, hogy Budapesten és Prágában ugyanannyi ember volt a GAMMA együttes koncertjén?

0705/6c

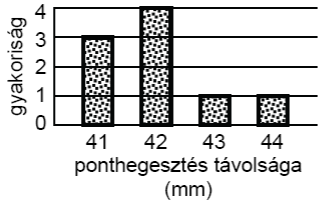
A piacon egy pénteki napon összesen 720 kg szilvát adtak el. Ez a mennyiség az alábbi kördiagram szerint oszlik meg az A, B, C és D fajták között.

c) Átlagosan mennyit fizettek a vevők egy kilogrammért az adott napon, ha az egyes fajták ára: A – 120 Ft/kg,
B – 200 Ft/kg,
C – 230 Ft/kg,
D – 260 Ft/kg.



0710/9

9. Egy ipari robotnak az a feladata, hogy a munkaasztalra helyezett lemezen ponthegesztést végezzen. Minden egyes lemezen a szélétől adott távolságra egyetlen ponthegesztést végez. Ellenőrzésnél megvizsgálják, hogy a robot mekkora távolságra végezte el a hegesztést. A méréshez olyan digitális műszert használnak, amelynek kijelzője egész milliméterekben mutatja a mért távolságokat.
A minőségellenőr véletlenszerűen kiválasztott kilenc lemezt a már elkészültek közül, és azokon az alábbi gyakorisági diagramnak megfelelő távolságokat mérte.



a) Számítsa ki a mért távolságok átlagát és szórását!

Ha a minőségellenőr bármely tíz, véletlenszerűen választott lemezen a mért távolságok szórását 1 milliméternél nagyobbnak találja, akkor a robotot le kell állítani, és újra el kell végezni a robot beállítását.

b) Tudjuk, hogy az ellenőr a már kiválasztott kilenc lemezhez egy olyan tizediket választott, hogy ezen minőségi követelmény alapján nem kellett leállítani a robotot. (Ehhez a kilenc lemezhez tartozó adatokat adtuk meg a feladat elején!) Mekkora távolságot mérhetett a minőségellenőr ezen a tizedik lemezen (a fent leírt mérőműszert használva)?

3. Egy utazási iroda az országos hálózatának 55 értékesítő helyén kétféle utat szervez Párizsba. Az egyiket autóbusszal (A), a másikat repülővel (R). Egy adott turnusra nézve összesítették az egyes irodákban eladott utak számát. Az alábbi táblázatból az összesített adatok olvashatók ki. Pl. az (1;2) „koordinátájú" 5-ös szám azt jelöli, hogy 5 olyan fiókiroda volt, amelyik az adott turnusra 1 db autóbuszos és 2 db repülős utat adott el.

		A típusú eladott utak száma				
		0	1	2	3	4
R típusú eladott utak száma	0	1	1	0	1	2
	1	1	2	2	3	1
	2	1	5	2	4	3
	3	0	3	1	9	2
	4	1	3	3	2	2

a) Összesen hány autóbuszos és hány repülős utat adtak el a vizsgált turnusra az 55 fiókban?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 55 fiókiroda közül véletlenszerűen választva egyet, ebben az irodában 5-nél több párizsi utat adtak el?

0905/2a

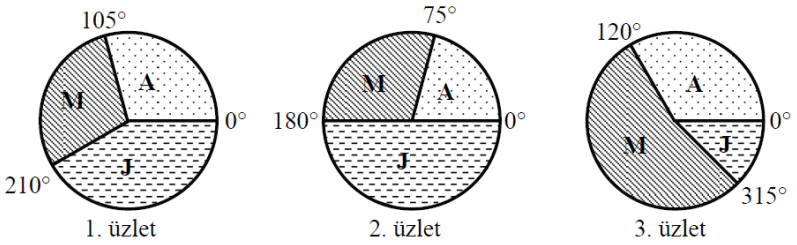
2. Egy gimnázium egyik érettségiző osztályába 30 tanuló jár, közülük 16 lány. A lányok testmagassága centiméterben mérve az osztályozó naplóbeli sorrend szerint:

166, 175, 156, 161, 159, 171, 167, 169, 160, 159, 168, 161, 165, 158, 170, 159.

a) Számítsa ki a lányok testmagasságának átlagát! Mekkora az osztály tanulóinak centiméterben mért átlagmagassága egy tizedesjegyre kerekítve, ha a fiúk átlagmagassága 172,5 cm?

1005/4ab

4. Egy könyvkiadó minden negyedévben összesíti, hogy három üzletében melyik szépirodalmi kiadványából fogyott a legtöbb. A legutóbbi összesítéskor mindhárom üzletben ugyanaz a három szerző volt a legnépszerűbb: Arany János, Márai Sándor és József Attila. Az alábbi kördiagramok szemléltetik, hogy az üzletekben milyen arányban adták el ezeknek a szerzőknek a műveit. A kördiagramok az első üzletből 408, a másodikból 432, a harmadikból 216 eladott könyv eloszlásait szemléltetik.



a) A kördiagramok adatai alapján töltse ki az alábbi táblázatot! Melyik szerző műveiből adták el a vizsgált időszakban a legtöbb könyvet?

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet	Összesített forgalom
Arany János				
Márai Sándor				
József Attila				
Összesen	408	432	216	

b) Készítsen olyan oszlopdiagramot a táblázat alapján, amely a vizsgált időszakban a szerzők szerinti összesített forgalmat szemlélteti!

4. Egy felmérés során megkérdeztek 640 családot a családban élő gyermekek számáról, illetve azok neméről. A felmérés eredményét az alábbi táblázat mutatja:

lányok száma \ fiúk száma	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	160	103	61	8	5	0
1	121	58	11	4	1	1
2	54	15	3	2	2	2
3	9	3	1	1	0	1
4	6	3	1	1	1	0
5	1	0	1	0	0	0

(Tehát pl. a gyermektelen családoknak a száma 160, és 15 olyan család volt a megkérdezettek között, amelyben 1 fiú és 2 lány van.)

a) Hány fiúgyermek van összesen a megkérdezett családokban?

b) A felmérésben szereplő legalább kétgyermekes családokban mennyi a leggyakoribb leányszám?

c) A családsegítő szolgálat a megkérdezett családok közül a legalább négy gyermeket nevelőket külön támogatja. Az alábbi táblázat kitöltésével készítsen gyakorisági táblázatot a külön támogatásban részesülő családokban lévő gyermekek számáról!

gyermekszám egy családban	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság							

Hány családot és összesen hány gyermeket támogat a családsegítő szolgálat?

2. Az ENSZ 1996-ban megjelent táblázatának egy részlete a nyolc legnagyobb népességszámú ország népességi adatait tartalmazza 1988-ban, és egy népesedésdinamikai modell előrejelzése alapján 2050-ben.

	1988		2050 (előrejelzés)	
Sorrend	**Ország**	**Népességszám (millió fő)**	**Ország**	**Népességszám (millió fő)**
1	Kína	1255	India	1533
2	India	976	Kína	1517
3	Egyesült Államok	274	Pakisztán	357
4	Indonézia	207	Egyesült Államok	348
5	Brazília	165	Nigéria	339
6	Oroszország	148	Indonézia	318
7	Pakisztán	147	Brazília	243
8	Japán	126	Banglades	218

(World Population Prospects: The 1996 Revision)

Feltételezzük, hogy Pakisztán lakossága 1988 és 2050 között minden évben ugyanannyi százalékkal nő, mint amennyi százalékkal az előző évben növekedett.

a) Ezzel a feltételezéssel élve – millió főre kerekítve – hány lakosa lesz Pakisztánnak 2020-ban? (Az évi százalékos növekedés két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon!)

b) A táblázat mindkét oszlopában szereplő országok népességi adataira vonatkozóan mennyivel változik az átlagos lakosságszám és a medián 1988 és 2050 között? (Válaszát millió főben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg.)

1305/07b

A megtöltött konzervdobozokat tizenkettesével csomagolták kartondobozokba. Egy ellenőrzés alkalmával 10 ilyen kartondoboz tartalmát megvizsgálták. Minden kartondoboz esetén feljegyezték, hogy a benne található 12 konzerv között hány olyat találtak, amelyben a töltősúly nem érte el az előírt minimális értéket. Az ellenőrök a 10 kartondobozban rendre 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 3, 0 ilyen konzervet találtak, s ezeket a konzerveket selejtesnek minősítették.

b) Határozza meg a kartondobozonkénti selejtes konzervek számának átlagát és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését!

1310/03

3. Egy 50 adatból álló adatsokaság minden adata eleme a {0; 1; 2} halmaznak.

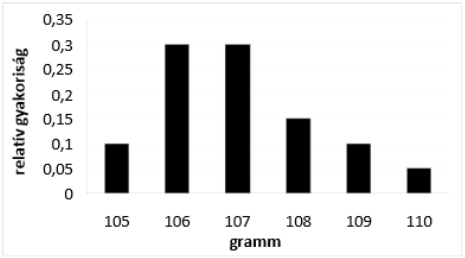
a) Legfeljebb hány 2-es lehet az adatsokaságban, ha az adatok átlaga 0,32?

b) Lehet-e az 50 adat mediánja 0, ha az átlaguk 1,04?

c) Lehet-e az 50 adat egyetlen módusza az 1, ha az átlaguk 0,62?

1405/03b

A minőségellenőrzés 120 darab terméket vizsgált meg. Feljegyezték az egyes darabok egész grammokra kerekített tömegét is. Hatféle tömeg fordult elő, ezek relatív gyakoriságát mutatja az oszlopdiagram.



b) Készítsen gyakorisági táblázatot a 120 adatról, és számítsa ki ezek átlagát és szórását!

1405/07a

7. Egy növekvő számtani sorozat első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6.

a) Igazolja, hogy a sorozat differenciája 3-mal egyenlő!

1410/05

5. A tavaszi idény utolsó bajnoki mérkőzésén a Magas Fiúk Kosárlabda Klubjának (MAFKK) teljes csapatából heten léptek pályára. A mérkőzés után az edző elkészítette a hét játékos egyéni statisztikáját. Az alábbi táblázat mutatja a játékosok dobási kísérleteinek számát és az egyes játékosok dobószázalékát egészre kerekítve. (A dobószázalék megmutatja, hogy a dobási kísérleteknek hány százaléka volt sikeres.)

Játékos mezszáma	Dobási kísérletek száma	Dobószázalék
4	2	50
5	3	0
6	10	60
7	8	25
10	7	43
13	6	33
15	14	57

a) Számítsa ki, hogy mennyi volt a csapat dobószázaléka ezen a mérkőzésen!

Az őszi idény kezdete előtt egy hónappal a MAFKK csapatához csatlakozott egy 195 cm magas játékos, így a csapattagok magasságának átlaga a korábbi átlagnál 0,5 cm-rel nagyobb lett. Pár nap múlva egy 202 cm magas játékos is a csapat tagja lett, emiatt a csapattagok magasságának átlaga újabb 1 cm-rel nőtt.

b) Hány tagja volt a MAFKK-nak, és mekkora volt a játékosok magasságának átlaga a két új játékos csatlakozása előtt?

1505/3ab

3. Egy kisvárosban hét nagyobb üzlet található. A tavalyi évben elért, millió forintra kerekített árbevételeikről tudjuk, hogy az átlaguk 120 millió Ft, és ez megegyezik a mediánjukkal. A hét adat egyetlen módusza 100 millió Ft. Két üzletben éppen átlagos, azaz 120 millió forintos a kerekített bevétel, a legnagyobb bevétel pedig 160 millió forint volt.

a) Számítsa ki a kerekített bevételek szórását!

A városban az egyik ruhakereskedéssel foglalkozó kisvállalkozás 80%-os haszonkulccsal dolgozik. Ez azt jelenti, hogy például egy 10 000 Ft-os beszerzési értékű terméket 18 000 Ft-ért árulnak az üzletükben. Amikor akciós időszak van, akkor a „rendes" eladási árból 50%-os árengedményt adnak minden eladott termékre.

b) Mekkora volt az eladásból származó árbevételnek és az eladott áru beszerzési értékének a különbsége (vagyis az „árnyereség") a tavalyi évben, ha összesen 54 millió Ft volt az éves árbevétel, és ebből 9 millió Ft-ot az akciós időszakban értek el?

1510/05a

5. Egy automatának 100 gramm tömegű hasábokat kell két egyenlő tömegű részre szétvágnia. A két darab közül az egyik az *A* futószalagra kerül, a másik a *B* futószalagra. Az utolsó négy darabolásnál az automata hibája miatt az *A* futószalagra került darabok tömege 51 g, 52 g, 47 g és 46 g.

a) Igazolja, hogy a két futószalagra került 4-4 darab tömegének átlaga különbözik, a szórása pedig megegyezik!

1605/01ab

1. Egy városi piacon a piros almát 5 kg-os csomagolásban árulják. A csomagokon olvasható felirat szerint egy-egy csomag tömege „5 kg ± 10 dkg". (Az almák nagy mérete miatt az 5 kg pontosan nem mérhető ki.) A minőség-ellenőrzés során véletlenszerűen kiválasztanak nyolc csomagot, és ezek tömegét méréssel ellenőrzik. Csak akkor engedélyezik az almák árusítását, ha egyik csomag tömege sem kevesebb 4 kg 90 dkg-nál, és a nyolc mérési adat 5 kg-tól mért átlagos abszolút eltérése nem haladja meg a 10 dkg-ot. A mérések eredménye a következő:

mérés sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
mért tömeg (dkg)	506	491	493	512	508	517	493	512

a) A mérési eredmények alapján engedélyezik-e az almák árusítását?

b) Határozza meg a nyolc mérési eredmény átlagát és szórását!

1610/3a

3. Egy kisváros vasútállomásáról munkanapokon 16 vonat indul, ezek indulási időpontjáról kimutatást vezetnek. A mellékelt táblázat ezt mutatja egy adott munkanap esetében.
A vasútvállalat pontosságra vonatkozó előírása szerint munkanapokon a vonatok legalább egyharmadának pontosan kell indulnia az állomásról, továbbá a késéseknek sem az átlaga, sem a mediánja nem haladhatja meg a 3 percet.

Indulás időpontja		
menetrend szerint	ténylegesen	késés (perc)
6:10	6:10	0
6:32	6:33	1
8:10	8:10	0
8:32	8:38	6
10:10	10:15	5
10:32	10:37	5
12:10	12:10	0
12:32	12:35	3
14:10	14:14	4
14:32	14:40	8
16:10	16:17	7
16:32	16:32	0
18:10	18:14	4
18:32	18:32	0
20:10		
20:32		

a) Legfeljebb hány perc késéssel indulhat a választott munkanapon az utolsó két vonat, hogy mindegyik előírás teljesüljön?
(A késéseket egész percekben mérik, a pontos indulást 0 perces késésnek számítják, a vonatok a menetrendben előírt indulási időpontjuknál korábban nem indulhatnak el.)

1705/2b

Az egyik hét munkanapjain utasszámlálást végeztek a személyvonaton. Hétfőn 200, kedden 160, szerdán 90, csütörtökön 150 utast jegyeztek fel.

b) Hány utas volt pénteken, ha tudjuk, hogy az öt adat átlaga is szerepel az adatok között, továbbá az adatok (egyetlen) módusza nem egyenlő a mediánjukkal?

1805/4a

4. Egy adatsokaság hét pozitív egész számból áll. Az adatsokaságnak két módusza van, a 71 és a 75. Az adatsokaság mediánja 72, az átlaga 73, a terjedelme pedig 7.

a) Határozza meg a hét számot!

1905/06a

6. Egy egyenlő szárú háromszög oldalai hosszúságának átlaga 10, szórása $3\sqrt{2}$.

a) Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát!

1910/09a

9. Egy középiskolában a tizedikesek évfolyamdolgozatot írtak matematikából. A dolgozatban maximálisan 100 pontot lehetett elérni. Az évfolyamra járó 80 tanuló közül a dolgozat megírásakor néhányan hiányoztak. A dolgozatokban elért pontszámok átlagát először úgy számították ki, hogy a hiányzó tanulók eredményét 0 pontosként vették figyelembe. Rövid időn belül észrevették, hogy ez a számítási mód hibás. A hibát kijavították, így a hiányzók figyelembe vétele nélkül kapott átlag 4,2 ponttal magasabbnak adódott, mint az első (hibás) számítás utáni átlag. Egy héttel később az első megírás alkalmával hiányzó tanulók pótolták a dolgozatot; az ő átlageredményük 64 pont lett (a pótdolgozatban is maximálisan 100 pontot lehetett elérni). A teljes tizedik évfolyam matematika-évfolyamdolgozatainak átlageredménye így 67 pontos lett.

a) Hány tanuló hiányzott a dolgozat első megírásakor?
Hány pont volt azoknak a tanulóknak a helyesen számolt átlageredménye, akik az első alkalommal megírták a dolgozatot?

2005/6c

Az egyik játékhéten összesen 3 222 831 lottószelvényt küldtek játékba a játékosok. Az alábbi táblázat mutatja a nyertes szelvények számát és nyereményét (2-nél kevesebb találattal nem lehet nyerni).

Találatok száma	Nyertes szelvények száma	Nyeremény (Ft/nyertes szelvény)
5	0	0
4	17	3 113 255
3	1617	34 915
2	62 757	1970

c) Számítsa ki, hogy mennyi volt a játékosok egy lottószelvényre jutó átlagos vesztesége ezen a héten, ha a játékba küldött szelvények egységára 250 Ft!

2105/07a

7. Egy nyolcfős csapat kosárlabdaedzése közben mind a nyolcan 10-szer kíséreltek meg hárompontost dobni. A sikeres dobások számát mind a nyolc főnél felírták. A feljegyzett számok: 6, 3, 7, 6, 4, 7, 8 és 7.

a) Határozza meg a sikeres dobások számának átlagát, mediánját és szórását!

2110/04c

A konferencián 200 magyar, 70 angol és 130 német matematikus vesz részt. Az angolok életkorának átlaga 44 év, a németeké 48 év, az összes résztvevő életkorának átlaga 45,7 év.

c) Mennyi a magyar résztvevők életkorának átlaga?

2110/05a

5. Tekintsük az (a_n) sorozatot: $a_1 = \binom{2}{2} = 1$, $a_2 = \binom{3}{2} = 3$, $a_3 = \binom{4}{2} = 6$ és így tovább, $a_n = \binom{n+1}{2}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$.

a) Számítsa ki az (a_n) sorozat első öt tagjából álló számsokaság átlagát és szórását!

2205/04a

4. Egy biliárdgolyó készletben található 9 golyó tömegére a következő mérési eredményeket kapták (grammban): 163, 163, 163, 163, 163, 164, 165, 166, 166.
Egy ilyen készletet akkor hitelesítenek a minőségellenőrzésen, ha az alábbi feltételek mindegyikének megfelel:

- minden golyó tömege legalább 160 gramm és legfeljebb 170 gramm;
- a golyók tömegének terjedelme legfeljebb 3 gramm;
- a golyók tömegének szórása legfeljebb 1 gramm.

a) Hitelesíthető-e ez a készlet?

2210/03a

3. Egy napelemes akkumulátortöltőket gyártó cég termékei közül 24 darabnak az élettartamát vizsgálták. A vizsgálat végeredményét (a 24 darabra vonatkozóan) az alábbi kördiagram szemlélteti.



a) Töltse ki az alábbi táblázatot, és határozza meg a 24 darab töltő élettartamának átlagát és szórását!

élettartam (hónap)						
darabszám						

2305/05d

Egy filmes portálon a *Parabola* című filmet 83-an értékelték 1-10-ig egy-egy egész számmal. A film erősen megosztotta a nézőket: 46-an 1-essel értékelték azt, ugyanakkor a kapott értékelések átlaga pontosan 5 lett.

d) Számítsa ki a 83 értékelés szórását!

2310/03

3. Tomi edzője mindegyik focimeccs után az 1-10-es skálán értékeli (egy-egy egész számmal) a játékosok teljesítményét. Az idei első hét mérkőzésen Tomi a következő értékeléseket kapta: 6, 8, 6, 2, 8, 8, 6.

a) Számítsa ki az első hét értékelés átlagát és szórását!

Tomi következő három mérkőzése után kiderült, hogy az addigi tíz értékelésnek az átlaga 6,3, a terjedelme 8, és egyetlen módusza van.

b) Határozza meg, hogy hányas értékeléseket kapott Tomi ezen a három mérkőzésen!

A 11. mérkőzésre kapott értékelés után Tomi átlaga a kapott értékelés tizedével csökkent az előző tíz mérkőzésének 6,3-es átlagához képest.

c) Hányas értékelést kapott Tomi a 11. mérkőzésen?

Számelmélet

0510/9

9. Egy centiméterben mérve egész szám élhosszúságú kockát feldaraboltunk 99 kisebb kockára úgy, hogy közülük 98 darab egybevágó, 1 cm élű kocka.
Számítsa ki az eredeti kocka térfogatát!

0602/2

2. Az 52 941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.
a) Az 52 941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk?
b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel?
c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyike sem négyzetszám!

1010/1b

b) Írja fel a 45-nek azt a legkisebb pozitív többszörösét, amely csak a 0 és a 8-as számjegyeket tartalmazza!

1310/08

8. Melyek azok a tízes számrendszerben kétjegyű természetes számok, amelyekben a számjegyek számtani és harmonikus közepének a különbsége 1?

1705/5

5. **a)** Határozza meg a c számjegy lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy $\overline{1c28}$ nem osztható 6-tal, $\overline{93c6}$ nem osztható 36-tal, $\overline{c3c5}$ pedig nem osztható 15-tel! ($\overline{pqrs}$ azt a négyjegyű számot jelöli, melynek első számjegye p, további számjegyei pedig rendre q, r és s.)

b) Igazolja, hogy nincs olyan n pozitív egész szám, amelyre $4^n + 6n - 1$ osztható 8-cal!

c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy $4^n + 6n - 1$ minden n pozitív egész szám esetén osztható 9-cel!

1710/6ab

6. **a)** *Ha $a|b$ igaz, akkor $a|b^2$ is teljesül* (a és b pozitív egész számok).
Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja!
($a|b$ azt jelenti, hogy az a egész szám osztója a b egész számnak.)

b) Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan p (pozitív) prímszám, amelyre az $n^2 - pn$ különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő?

1805/4b

A 72-nek és az n pozitív egész számnak a legkisebb közös többszöröse 27 720.

b) Határozza meg az n lehetséges értékeinek számát, és adja meg az n legkisebb lehetséges értékét!

1810/08c

c) Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik befogója 15 egység hosszú, és a másik két oldala is egész szám hosszúságú? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőknek.)

1905/09a

9. **a)** Hány olyan 1000-nél kisebb p pozitív egész szám van, amelyre a p és a 42 relatív prímek?

2010/04b

András azt állítja, hogy az összes pingponglabdájának száma 6-tal osztva 2 maradékot, 15-tel osztva pedig 1 maradékot ad.

b) Mutassa meg, hogy András állítása hamis!

2110/03b

b) A 8-as számrendszerben háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott szám a 9-es számrendszerben is háromjegyű?

2110/06b

Az ókori Egyiptom matematikájában a számok négyzetének is jelentős szerep jutott.

b) Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amellyel az $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$ számot megszorozva négyzetszámot kapunk?

2310/01a

1. **a)** Oldja meg az egyenletet, ha x és y **pozitív egész** számok!

$$\frac{x}{8}=\frac{1,5}{y}$$

Számsorozatok

0610/9

9. Egy (a_n) számsorozatról a következőket tudjuk:

- a harmadik tagtól kezdve minden tag kiszámítható a következő rekurzív képlet segítségével: $a_n=a_{n-1}+12a_{n-2}$;
- az a_1, a_2 és a_3-9a_1 ebben a sorrendben egy számtani sorozat 3 egymást követő tagja;
- az (a_n) sorozat első öt tagjának összege 682.

Mekkora ennek a számsorozatnak a hatodik tagja?

0805/8

8. Legyen n pozitív egész. Adottak az alábbi sorozatok:

$\{a_n\}$, ahol $a_n=(-2)^n+2^n$;

$\{b_n\}$, ahol $b_n=|n-23|-|n-10|$;

$\{c_n\}$, ahol $c_n=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)^2$.

Vizsgálja meg mindhárom sorozatot korlátosság és monotonitás szempontjából! Válaszoljon mindhárom esetben, hogy a sorozat korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem! (Válaszait indokolja!) Korlátos sorozat esetében adjon meg egy alsó és egy felső korlátot!

1205/05b

b) Igazolja, hogy a $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}$ $(n\in\mathbf{N}^+)$ sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos!

1605/03

3. **a)** Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot!

Tekintsük a következő állítást:
Ha az $\{a_n\}$ számsorozat konvergens, akkor az $\{a_n\}$ sorozat értékkészlete véges számhalmaz. (Véges halmaz: elemeinek száma megadható egy természetes számmal.)

b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

2010/06c

c) Igazolja, hogy ha L és K adott pozitív számok, $n \in \mathbf{N}^+$, akkor a $b_n = \frac{L}{1+K\cdot 0{,}75^n}$ képlettel megadott sorozat korlátos, szigorúan monoton növekedő, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

2110/05b

5. Tekintsük az (a_n) sorozatot: $a_1 = \binom{2}{2} = 1$, $a_2 = \binom{3}{2} = 3$, $a_3 = \binom{4}{2} = 6$ és így tovább, $a_n = \binom{n+1}{2}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$.

a) Számítsa ki az (a_n) sorozat első öt tagjából álló számsokaság átlagát és szórását!

b) A fenti (a_n) sorozatból képezzük a (b_n) sorozatot: $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Mennyi a (b_n) sorozat határértéke?

2210/04c

Adott az $a_n = \frac{2+2\pi n}{n}$ sorozat $(n \in \mathbf{N}^+)$.

c) Igazolja, hogy ez a sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos, és adja meg a sorozat határértékét!

2310/07c

c) Számítsa ki az $\{a_n\}$ sorozat határértékét, ha $a_n = \frac{30}{1+59\cdot 0{,}905^n}$.

2405/05ab

5. **a)** Határozza meg az $a_n = \frac{n+4}{n}$ sorozat határértékét!

b) Igazolja, hogy az a_n sorozat szigorúan monoton csökkenő!

Számtani sorozat

0602/4

4. Állítsuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendbe, majd bontsuk rendre 1-gyel növekvő elemszámú csoportokra, a felbontást az alábbi módon kezdve:

(1), (2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9; 10), …

a) A 100-adik csoportnak melyik szám az első eleme?
b) Az 1851 hányadik csoport hányadik eleme?

0605/4b

b) Legyen (b_n) egy számtani sorozat, amelynek az első tagja 5, és a differenciája 3. Mekkora a valószínűsége, hogy ha ennek a számtani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad?

0910/4

4. Az (a_n) mértani és a (b_n) számtani sorozatnak is 1 az első tagja, és mindkét sorozat hatodik tagja (-1).

a) Sorolja fel mindkét sorozat első öt tagját!
b) Milyen pozitív egész n-re lesz a két sorozat első n tagjának összege ugyanakkora?

1110/1

1. Kinga 10. születésnapja óta kap havi zsebpénzt a szüleitől. Az első összeget a 10. születésnapján adták a szülők, és minden hónapban 50 Ft-tal többet adnak, mint az azt megelőző hónapban. Egy bizonyos hónapban, mikor éppen 1850 Ft volt a havi zsebpénze, összeadta az addig kapott összes zsebpénzét. Az összeg 35100 Ft lett. Mennyi volt Kinga induló zsebpénze, és hány hónap telt el a 10. születésnapja óta?

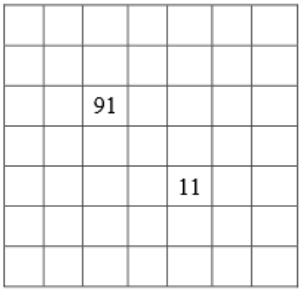
1405/07a

7. Egy növekvő számtani sorozat első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6.

a) Igazolja, hogy a sorozat differenciája 3-mal egyenlő!

1410/09ab

9. Éva egy 7×7-es táblázat bal felső mezőjétől kezdve, balról jobbra haladva, sorról sorra beírta egy számtani sorozat első 49 tagját úgy, hogy a tagok sorrendjét nem változtatta meg. (A sorozat 1. tagja a bal felső sarokba került, a 8. tag a második sor első mezőjébe, a 49. tag pedig a jobb alsó sarokban áll.)



a) Mennyi a táblázatba írt 49 szám összege, ha Éva a harmadik sor harmadik mezőjébe a 91-et, az ötödik sor ötödik mezőjébe pedig a 11-et írta?

Péter a táblázat minden sorából kiválasztja a számtani sorozat egy-egy tagját úgy, hogy a hét kiválasztott szám közül semelyik kettő ne legyen egy oszlopban.

b) Igazolja, hogy akárhogyan is választja ki Péter így a számokat, a hét szám összege minden esetben ugyanannyi lesz!

1610/1

1. Legyen az x pozitív valós szám.

a) Határozza meg x értékét úgy, hogy a 27 és az x számtani közepe 6-tal nagyobb legyen, mint a mértani közepük!

b) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az alábbi állítás! Válaszát indokolja!
Ha $x > 27$, akkor a 27-nek és az x-nek a mértani közepe kisebb a két szám számtani közepénél.

c) Fogalmazza meg az előbbi állítás megfordítását, és határozza meg a megfordított állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

1610/9b

b) Három teljes gráf pontjainak száma egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja. Igazolja, hogy a három gráf éleinek száma ekkor nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő tagja!
(Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

1710/9

9. A pozitív páratlan számokat „háromszög” alakban rendezzük el a következők szerint: az első oszlopba írjuk az első páratlan számot, a második oszlopba a következő kettőt, a harmadik oszlopba a következő hármat, és így tovább. Például az ötödik oszlop negyedik helyén a 27 áll (lásd az ábrát is).

1	3	7	13	21
	5	9	15	23
		11	17	25
			19	27
				29

a) Hányadik oszlop hányadik helyén áll a 99?

b) Határozza meg a 2017. oszlopban álló első számot!

c) Igazolja, hogy az n-edik oszlopban álló számok összege n^3 ($n \in \mathbf{Z}^+$).

1910/01b

b) Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 852,5; első tíz tagjának összege pedig 2330. Számítsa ki a sorozat első tagját és differenciáját!

1910/07b

b) Határozza meg azokat az 5-nél nagyobb n egész számokat, melyekre $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$ és $\binom{n}{6}$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

2005/01a

1. Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, a második és negyedik tagjának összege pedig 130.

a) Adja meg a sorozat ötödik tagját!

2110/05c

A (c_n) számtani sorozat differenciája 0,25. A sorozat első n tagjának összege 100, első $2n$ tagjának összege 300 ($n \in \mathbf{N}^+$).

c) Határozza meg n értékét!

2205/02a

2. **a)** Egy **számtani** sorozat első tagja 5, differenciája 3, az első n tag összege pedig 4900. Határozza meg n értékét!

2305/04a

4. Egy számtani sorozat 20. tagja 108. A sorozat első 20 tagjának összege 1115.

a) Számítsa ki a sorozat első tagját és differenciáját!

2405/06a

6. Domi két héten keresztül felüléseket végzett reggeli tornaként. A második naptól kezdve minden reggel 5-tel több felülést végzett, mint az előző napon. A két hét alatt összesen 1001 felülést végzett.

a) Hány felülést végzett Domi a legelső napon, és hányat a legutolsón?

Számtani-mértani közép

1610/1a

1. Legyen az x pozitív valós szám.

a) Határozza meg x értékét úgy, hogy a 27 és az x számtani közepe 6-tal nagyobb legyen, mint a mértani közepük!

2405/06c

c) Írja a következő mondatban a pontozott vonalakra a megadottak közül a megfelelő szavakat úgy, hogy az állítás igaz legyen: **számtani**, **harmonikus**, **mértani**.

„Két különböző pozitív valós szám …… közepe mindig nagyobb, mint a …… közepe, de kisebb, mint a …… közepe.”

Számtani-mértani sorozat

0505/3

3. Egy növekedő számtani sorozat első három tagjának összege 60. Az első tagot 64-gyel növelve, a másik két tagot változatlanul hagyva, egy mértani sorozat első három tagjához jutunk. Mennyi a két sorozat első három tagja?

0705/3

3. Egy pozitív tagokból álló mértani sorozat első három tagjának összege 26. Ha az első taghoz egyet, a másodikhoz hatot, a harmadikhoz hármat adunk, akkor ebben a sorrendben egy számtani sorozat első három tagját kapjuk. Adja meg ennek a számtani sorozatnak az első három tagját!

1510/01b

A sérült olajkutat végül sikerült elzárni, így az olajfolt területének növekedése megállt. Ekkor kezdték meg az olajszennyezés eltávolítását. A környezetvédelmi hatóság a 12 400 m^2 területű olajfolt megszüntetésére 31 napos határidőt szabott meg. Az első napon még csak 130 m^2-ről sikerült eltávolítani az olajfoltot (így a területe 12 270 m^2 lett), de a teljesítményt növelni tudták: az egy nap alatt megtisztított terület mérete minden nap ugyanakkora értékkel nőtt.

b) Mekkora ez a napi növekedés, ha pontosan az előírt határidőre sikerült a 12 400 m^2-es olajfolt teljes eltávolítása?

1610/9a

9. **a)** Egy számtani sorozat első tagja 4, differenciája 5.
Egy mértani sorozat első tagja 3, hányadosa 2.
Az 1000-nél kisebb pozitív egészek közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk. Mekkora a valószínűsége, hogy olyan számot választottunk, amely tagja valamelyik sorozatnak?

Válaszát $\frac{p}{q}$ alakban adja meg úgy, hogy p és q pozitív egészek és relatív prímek legyenek!

Százalékszámítás

0602/6

6. A „TOJÁS” farmon átlagosan 10 000 tyúkot tartanak. Ezek egy év alatt mintegy 2,20 millió tojást tojnak.
A tenyésztők azt tapasztalták, hogy – valószínűleg a zsúfoltság csökkenése miatt – ha a tyúkok számát 4%-kal csökkentik, akkor az egy tojóra jutó átlagos tojástermelés 8%-kal nő.

a) A tyúkok számának 4%-os csökkentése után, mennyi lett a tojásfarmon az évi termelés?

Az a tapasztalat, hogy a tyúkok számának p %-kal történő csökkentése $2p$ %-kal növeli az egy tyúkra vonatkozó tojásmennyiséget, csak $p < 30$ esetén érvényes.

b) Hány százalékkal csökkentették a tyúkok számát, ha ezzel évi 8%-os termelésnövekedést értek el egy év alatt?

0610/5c

c) Egy ékszerész vállalta, hogy elkészít 20 db egyforma tömegű ajándéktárgyat: a szobortalapzat kicsinyített mását. Az egyes ajándéktárgyak az alábbi féldrágakövek valamelyikéből készültek: achát, hematit, zöld jade és gránát. A kész ajándéktárgyakat a megrendelő átvételkor egyben lemérte. A 20 tárgy együttes tömege megfelelt a megrendelésnek. Otthon egyenként is megmérte a tárgyakat, és kiderült, hogy a féldrágakövekből készített négyféle ajándéktárgy közül egyik sem a megrendelt tömegű. Az ugyanabból az anyagból készülteket egymással azonos tömegűnek mérte. A három achát tárgy mindegyike 1%-kal kisebb; a hat darab hematit tárgy mindegyike 0,5%-kal kisebb, a hét zöld jade tárgy mindegyike 1,5%-kal nagyobb a megrendelésben szerepelt értéknél.
A gránát tárgyak tömege hány százalékkal tért el a megrendeléstől?

0705/6ab

6. Az érett szilva tömegének kb. 5%-a a mag tömege. A kimagozott szilva átlagosan 90% vizet és 10% ún. szárazanyagot tartalmaz. A szilva aszalásakor a szárítási technológia során addig vonunk el vizet a kimagozott szilvából, amíg a megmaradt tömegnek csak az 5%-a lesz víz, a többi a változatlan szárazanyag-tartalom. Az így kapott terméket nevezzük aszalt szilvának.

a) A fentiek figyelembevételével mutassa meg, hogy 10 kg leszedett szilvából 1 kg aszalt szilva állítható elő!

Az aszalt szilva kilóját 1400 Ft-ért, a nyers szilvát pedig 120 Ft-ért lehet értékesíteni.

b) Kovács úr szilvatermésének felét nyersen, másik felét pedig aszalt szilvaként adta el. Hány kg volt Kovács úr szilvatermése, ha a nyers és az aszalt szilvából összesen 286 000 Ft bevételhez jutott?

0910/6

6. Egy üzletben háromféle palackozott ecet van a polcon: 12 db 10%-os, 8 db 15%-os és 5 db 20%-os. Mindegyiket azonos csomagolásban, 1 literes kiszerelésben árulják.

a) Hány százalékos ecetet kapnánk, ha a polcon lévő összes ecetet összeöntenénk?

Kázmér elképzelése az, hogy egy palack ecet árát az üres palack árából, a tömény ecet, valamint a tiszta víz literenkénti árából kalkulálják ki.

b) Az üres palack ára 30 Ft, a tömény ecet literje 500 Ft és a tiszta víz literje 10 Ft. Mennyibe kerülne a három különböző töménységű palackozott ecet az üzletben, ha a fogyasztói ár a Kázmér elképzelése szerint kalkulált ár 120%-a? (A fogyasztói árat a végén kerekítik egész forintra!)

Kázmér felírta a literes palackok bolti árait: a 10%-os ecet 144 Ft, a 15%-os 150 Ft, a 20%-os 156 Ft.

c) Ha ezeket az árakat a **b)** részben leírtak szerint kalkulálták, akkor ki lehet-e mindezekből számítani az üres palack, a tömény ecet és a tiszta víz árát?

1005/5

5. Egy áruházban egy mosóport négyféle kiszerelésben árusítanak. Az első kiszerelés 50%-kal drágább a harmadiknál, és 20%-kal kevesebb mosópor van benne, mint a másodikban. A második 50%-kal több mosóport tartalmaz, mint a harmadik, és 25%-kal többe kerül, mint az első.

a) Az első három kiszerelés közül melyikben a legalacsonyabb a mosópor egységára?

A negyedik fajta kiszerelést úgy állították össze, hogy annak dobozán a feltüntetett egységár megegyezett az első három kiszerelés átlagos egységárával.

b) Ha a legolcsóbb kiszerelésű dobozon 600 Ft egységárat tüntettek fel, akkor hány forint egységár szerepel a negyedik fajta dobozon?

1110/7b

A palack tartalmát kiöntve, a palackot összenyomva, annak eredeti térfogata $2p$ százalékkal csökken. Egy hulladékot újrahasznosító cég (speciális gép segítségével) az ilyen módon tömörített palack térfogatát annak további p százalékával tudja csökkenteni. Az összenyomással, majd az ezt követő gépi tömörítéssel azt érik el, hogy a palackot eredeti térfogatának 19,5 százalékára nyomják össze.

b) Határozza meg p értékét!

1205/01

1. Egy 2011-ben készült statisztikai összehasonlításban az alábbiakat olvashattuk:
„Ha New York-ban az átlagfizetést és az átlagos árszínvonalat egyaránt 100%-nak vesszük, akkor Budapesten az átlagfizetés 23,6%, az átlagos árszínvonal pedig 70,9%. (Az árszínvonal számításához 122 áru és szolgáltatás árát hasonlították össze.)” [1]
Feltételezve, hogy az idézet megállapításai igazak, válaszoljon az alábbi kérdésekre!

a) Ha Budapesten a havi átlagfizetés 150 ezer forint, akkor hány dollár ($) a havi átlagfizetés New York-ban, 190 forint/dollár (Ft/$) árfolyammal számolva? Válaszát egész dollárra kerekítve adja meg!

b) Ha a New York-i havi átlagfizetésből egy bizonyos termékből 100 kg-ot vásárolhatunk New York-ban, akkor körülbelül hány kg-ot vásárolhatunk ugyanebből a termékből a budapesti havi átlagfizetésből Budapesten? (Feltehetjük, hogy a szóban forgó termék budapesti egységára 70,9%-a a termék New York-i egységárának.)

1605/01c

A piac egyik eladójához friss eper érkezett. Az eladó eredetileg azt tervezte, hogy az I. osztályú epret 800 Ft/kg, a II. osztályút 650 Ft/kg, a III. osztályút pedig 450 Ft/kg egységáron értékesíti. A piacon azonban túlkínálat volt eperből, ezért úgy döntött, hogy az összes epret egy kupacba önti össze, és akciós egységáron árulja. Az akciós eladási egységár kialakításakor úgy számolt, hogy ha az összes epret ezen az egységáron adja el, akkor a bevétele (körülbelül) 15%-kal lesz csak kevesebb, mint azt eredetileg tervezte.

c) Mennyi legyen az akciós egységár, ha az összeöntött eper 35%-a I. osztályú, $\frac{3}{8}$ része II. osztályú, a többi 33 kg pedig III. osztályú volt eredetileg?
Válaszát egész értékre kerekítve adja meg!

1610/3b

Egy külföldi utazás teljes árú vasúti menetjegye tavaly 209 euróba került. A menetjegy árát fél évvel ezelőtt p euróval felemelték, majd a múlt héten p százalékkal csökkentették ($p > 0$). Így a menetjegy ára 189 euró lett.

b) Határozza meg p értékét!

1705/9a

9. Egy pár kesztyű árát először p százalékkal csökkentették, majd a csökkentett ár $p + 4{,}5$ százalékával tovább mérsékelték. A kétszeri árcsökkentés után a kesztyű 18,6%-kal olcsóbb lett, mint az árcsökkentések előtt volt.

a) Határozza meg a két árcsökkentés százalékos értékét!

1710/8a

8. Egy egyesületi összejövetel társaságához 5 nő és 4 férfi csatlakozott, így a nők aránya a korábbi 25%-ról 36%-ra nőtt.



a) Hány főből állt az eredeti társaság?

2005/08a

8. Egy étteremben (hatósági engedély birtokában) az érvényes általános forgalmi adótól (áfa) kismértékben eltérő adókulcsok alkalmazásának hatását vizsgálták az ételek és italok fogyasztására nézve. Az ételek esetében 4%, az italok esetében 30% áfát adtak hozzá a nettó árhoz, és az így kapott bruttó árat kellett a vendégnek kifizetnie.
A kísérlet első napján az új számítógépes program hibája miatt a számlán éppen fordítva adták a nettó árakhoz az áfát: az ételek nettó árához 30%-ot, az italok nettó árához pedig 4%-ot számoltak hozzá, és ez a számlán is így, hibásan jelent meg.
Egy család ebben a vendéglőben ebédelt, és a hibás program miatt 8710 Ft-os számlát kapott. A hibát észrevették, így végül a helyes összeget, 7670 Ft-ot kellett kifizetniük.

a) Hány forint volt az elfogyasztott ételek, és hány forint volt az elfogyasztott italok helyes bruttó ára?

Szélsőértékszámítás

0505/9

9. Az ABC háromszög oldalai $AB = 42$, $BC = 40$ és $CA = 26$. Írjunk téglalapot a háromszögbe úgy, hogy a téglalap egyik oldala illeszkedjen a háromszög AB oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög CA, illetve BC oldalára essen. Tekintsük az így beírható téglalapok közül a legnagyobb területűt! Mekkorák ennek a téglalapnak az oldalai?

1010/7

7. Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés teljes havi mennyisége (x kilogramm) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: $(36–0{,}03x)$ euró.
A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő összes havi kiadást (költséget) a $0{,}0001x^3 - 30{,}12x + 13000$ összefüggés adja meg, szintén euróban.

a) Számítsa ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel?

b) Adja meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul ez meg? *(nyereség=bevétel–kiadás)*

1205/07

7. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a (2; 6) pontra. Tudjuk, hogy $a < 0$. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját P, az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki ezt a területet (O a koordináta-rendszer origóját jelöli)!

1305/07a

7. Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdeni, amelynek térfogata 1000 cm^3. A doboz aljának és tetejének anyagköltsége 0,2 $\frac{Ft}{cm^2}$, míg oldalának anyagköltsége 0,1 $\frac{Ft}{cm^2}$.

a) Mekkorák legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják?
Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!
Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve!

1310/06a

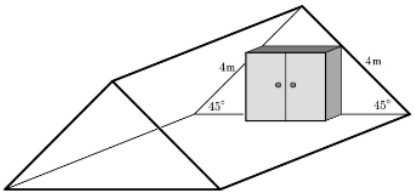
6. Egy teherszállító taxikat üzemeltető társaság egyik, elsősorban városi forgalomban alkalmazott kocsijának teljes működtetési költsége két részből tevődik össze:

- az üzemeltetési költség x $\frac{km}{h}$ átlagsebesség esetén $400 + 0{,}8x$ Ft kilométerenként;
- a gépkocsivezető alkalmazása 2200 Ft óránként.

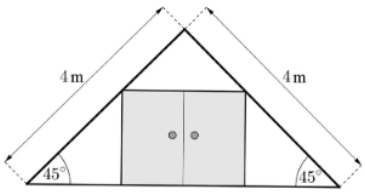
a) Mekkora átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége? Válaszát $\frac{km}{h}$-ban, egészre kerekítve adja meg!

1405/09a

9. Kovács úr a tetőterébe egy téglatest alakú beépített szekrényt készíttet. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású”, a második pedig elölnézetben ábrázolja a szekrényt.



1. vázlat



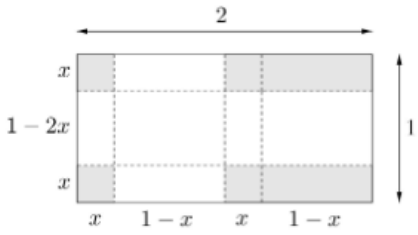
2. vázlat

A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie.

a) Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (azaz a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni?
(A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.)

1410/07a

7. Egy üzemben egyforma, nagyméretű fémdobozok gyártását tervezik. A téglatest alakú doboz hálózatát egy 2 méter × 1 méteres téglalapból vágják ki az ábrán látható módon. A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. (A forrasztási eljárás nem jár anyagveszteséggel.)



a) Hogyan válasszák meg a doboz méreteit, hogy a térfogata maximális legyen? Válaszát centiméterben, egészre kerekítve adja meg!

1605/09a

9. A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x)=\frac{1}{20}(x^2-1800x+950\,000)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban $(x>0)$, $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

a) A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg?

1605/09c

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km.

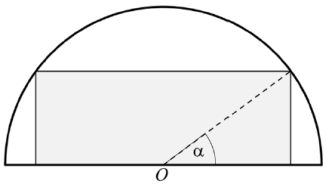
b) Igazolja, hogy v km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v-502\,200+\frac{265\,050\,000}{v}$ kg lesz! $(v>0)$

A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességére teljesül, hogy 800 km/h ≤ v ≤ 1100 km/h.

c) A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a **legnagyobb**, és melyik esetén a **legkisebb** az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás?

1610/8b

Egy várrom területén szabadtéri színházat alakítanak ki. A tervrajz szerint a téglalap alakú színpadot az egyik bástya félkör alakban elhelyezkedő falmaradványai közé helyeznék el. A bástya belső átmérője 12 méter. (Az ábrán a tervrajz egy részlete látható: O a félkör középpontja, a téglalap csúcsába vezető sugár és az átmérő közötti szög pedig α; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.)



b) Hogyan kell megválasztani az α szöget, hogy a színpad területe a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez a legnagyobb terület?

1805/9b

9. Egy városban bevezették a fizetős parkolást. A parkolási díj (a parkolás időtartamától függetlenül) napi 10 garas. A díjakból származó teljes bevétel a városi költségvetést illeti. Kezdetben nem alkalmaztak parkolóőröket.
Az új rendszer bevezetése után néhány héttel megállapították, hogy naponta kb. 15 000 autós parkolt a fizetős övezetben, és mintegy 25 százalékuk „bliccelt", azaz nem fizette meg a parkolási díjat. Emiatt a városvezetés – egy előzetes hatástanulmány alapján – parkolóőrök alkalmazása mellett döntött. Az őrök ellenőrzik a díj megfizetését, és annak elmaradása esetén megbírságolják a mulasztó autóst: minden bliccelőnek 150 garast kell fizetnie (ez az összeg tartalmazza a parkolási díjat és a bírságot is).
A tanulmány azt állítja, hogy a sűrűbb ellenőrzés növelni fogja a fizetési hajlandóságot: minden egyes újabb parkolóőr alkalmazásával a bliccelők aránya 0,5%-kal kisebb lesz (például 2 parkolóőr alkalmazása esetén 24%-ra csökken). A tanulmány számításai szerint egy parkolóőr egy nap alatt kb. 200 autót fog ellenőrizni, továbbá egy parkolóőr alkalmazásának napi költsége 330 garas, amelyet a befolyt parkolási díjakból és bírságokból kell kifizetni.
A tanulmány még a következőket feltételezte: naponta átlagosan 15 000 parkoló autó lesz, egy autót legfeljebb egy parkolóőr ellenőriz, és a bliccelők aránya a parkolóőrök által ellenőrzött autók között minden esetben ugyanannyi, mint az összes parkoló autó között.

a) A hatástanulmány becslései szerint mekkora lenne a város parkolási díjakból származó napi nettó (azaz a költségekkel csökkentett) bevétele 10 parkolóőr alkalmazása esetén?

b) Amennyiben a hatástanulmány becslései helytállóak, akkor hány parkolóőr alkalmazása esetén lenne a parkolási díjakból származó napi nettó bevétel maximális?

1810/04c

4. Egy zöldségárus vállalkozó egyik reggel 200 kg első osztályú barackot visz eladásra a piacra. Tapasztalatból tudja, hogy az első osztályú barack eladási egységára és a napi eladott mennyiség között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat van (az eladott mennyiség az eladási egységár lineáris függvénye). Ha egész nap 500 Ft/kg áron kínálná a barackot, akkor várhatóan a fele fogyna el, míg ha 300 Ft/kg áron adná, akkor a 70%-a.

a) Mennyi lenne a zöldségárusnak az első osztályú barack eladásából származó bevétele, ha egész nap 400 Ft/kg-os egységáron kínálná a barackot?

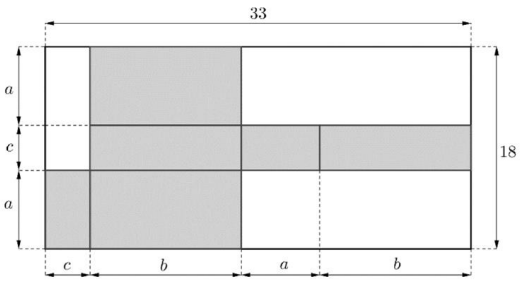
b) Igazolja, hogy ha egész nap x (Ft/kg) az első osztályú barack egységára, y (kg) pedig a napi eladott mennyiség, akkor a közöttük lévő kapcsolat:
$y = -\frac{1}{5}x + 200$ $(0 < x < 1000)$.

A nap végén a 200 kg-ból megmaradó barackot a zöldségárus másnap már nem adhatja el első osztályúként. Ezért a megmaradó teljes mennyiséget eladja egy gyümölcsfeldolgozó vállalkozásnak, mégpedig 80 Ft/kg egységáron.

c) Mekkora eladási egységáron kínálja a barackot a zöldségárus napközben, hogy a napi bevétele maximális legyen? (A napi bevétel az első osztályúként eladott barackból származó bevétel plusz a gyümölcsfeldolgozó által fizetett összeg.)

1905/05b

5. Egy 33×18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az *ábra* szerint választják meg.



a) Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7$ cm!

b) Hogyan kell megválasztani az a, b, c élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

1910/05c

Az egységnyi oldalú, szabályos ABC háromszögbe olyan $PQRS$ téglalapot írunk, melynek PQ oldala az AB oldalra illeszkedik, R a BC oldal pontja, S pedig a CA oldalé.

c) Határozza meg a $PQRS$ téglalap területének maximális értékét!

2110/07b

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az adatokat pontokkal jelenítjük meg, és különböző egyeneseket veszünk fel, akkor mindegyik egyeneshez kiszámítható a pontok függőleges távolságainak **négyzetösszege** (az ábrán látható példában $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$). Tekintsük azt az egyenest a *pontokra legjobban illeszkedő egyenesnek*, amelyre ez a négyzetösszeg a lehető legkisebb.
Adott három pont a koordináta-rendszerben: $A(1; 3)$, $B(3; 5)$ és $C(4; 4)$.

b) Adja meg az m értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű (origón átmenő) egyenes a megadott módszer szerint a *legjobban illeszkedjen az A*, *B* és *C* pontokra! ($m \in \mathbf{R}$)

2205/07bc

Ha egy cég x tonna lisztet állít elő egy nap alatt ($0 < x < 5$), és ezt a mennyiséget el is adja, akkor egy elemzés szerint a napi nyereség értékét az $n(x) = 0,8x^2(x-3)(1,5-x)$ képlet adja meg, a nyereséget tízezer tallérban számítva. (Negatív helyettesítési érték veszteséget jelent.)

b) Mutassa meg, hogy csak $1,5 < x < 3$ esetén nyereséges a napi termelés!

c) Hány tallér az elérhető legnagyobb napi nyereség, és ezt hány tonna liszt (előállítása és eladása) esetén érik el?

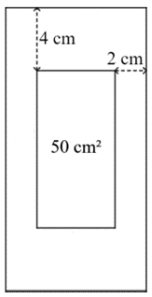
2210/08b

Egy téglatest térfogata 72 dm^3. A téglatest egyik éle kétszer olyan hosszú, mint egy másik éle.

b) Határozza meg az ilyen tulajdonságú téglatestek közül a minimális felszínű téglatest éleinek hosszát!

2305/06c

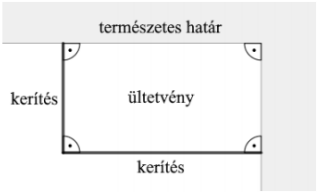
Egy téglalap alakú kartonlap oldalhosszait úgy szeretnénk megválasztani, hogy alul és felül 4-4 cm-es, jobb és bal oldalon 2-2 cm-es margót hagyva a lap közepén megmaradó téglalap alakú terület 50 cm^2 nagyságú legyen.



c) Mekkorának válasszuk a kartonlap oldalainak hosszát, hogy a területe a lehető legkisebb legyen?

2310/07d

Különleges facsemeték neveléséhez egy téglalap alakú részt akarnak elkeríteni. A téglalap két szomszédos oldala természetes határokkal védhető, ezért csak a másik két oldalon kell kerítést építeni. A környezeti adottságok miatt a kerítés építési költsége a két oldalon különböző: az egyik oldalon 5 ezer Ft/m, a másik oldalon pedig 10 ezer Ft/m. A kerítés építésére összesen 400 ezer Ft áll rendelkezésre.



d) Hogyan kell megválasztani a két kerítésszakasz hosszát, hogy a rendelkezésre álló összegből a legnagyobb területű ültetvényt lehessen elkeríteni?

Szöveges feladat

0605/5

5. Panni és Kati elvállalta, hogy szövegszerkesztővel legépelik Dani szakdolgozatát. A két lány együttes munkával 12 munkaóra alatt végezne a gépeléssel.
Kedden reggel 8 órakor kezdett Panni a munkához, Kati 10 órakor fogott hozzá. Megállás nélkül, ki-ki egyenletes sebességgel dolgozott kedden 14 óráig, ekkor a kéziratnak a 40%-ával végeztek, és abbahagyták a munkát.

a) Hány óra alatt gépelné le Panni, illetve Kati a teljes szakdolgozatot (állandó munkatempót, és megszakítás nélküli munkát feltételezve)?

Szerdán reggel egyszerre kezdtek hozzá 9 órakor a gépeléshez, és együtt egyszerre fejezték be. Szerdán Panni fél óra ebédszünetet tartott, Kati pedig a délelőtti munkáját egy órányi időtartamra megszakította.

b) Hány órakor végeztek a lányok a munkával szerdán?

1310/04a

4. Aranyékszerek készítésekor az aranyat mindig ötvözik valamilyen másik fémmel. A karát az aranyötvözet finomsági fokát jelöli. Egy aranyötvözet 1 karátos, ha az ötvözet teljes tömegének $\frac{1}{24}$ része arany, a k karátos aranyötvözet tömegének pedig $\frac{k}{24}$ része arany.
Kata örökölt a nagymamájától egy 17 grammos, 18 karátos aranyláncot. Ebből két darab 14 karátos karikagyűrűt szeretne csináltatni.

a) Legfeljebb hány gramm lehet a két gyűrű együttes tömege, ha aranytartalmuk összesen sem több, mint az aranylánc aranytartalma?

1405/07/b

András, Barbara, Cili, Dezső és Edit rokonok. Cili 3 évvel idősebb Barbaránál, Dezső 6 évvel fiatalabb Barbaránál, Edit pedig 9 évvel idősebb Cilinél. Dezső, Barbara és Edit életkora (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagja, András, Barbara és Cili életkora (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat három szomszédos tagja.

b) Hány éves András?

1610/8a

8. Egy színházban a jegyek az I., a II. vagy a III. árkategóriába tartoznak. Az egyik esti előadásra összesen 200 jegyet adtak el. Az eladott jegyek között a III. árkategóriájúak száma a másik két árkategóriába tartozó jegyek együttes számának kétharmada, az I., illetve II. árkategóriájú jegyek számának aránya pedig 9:11 volt.

a) Hány jegyet adtak el az egyes árkategóriákban?

1705/2a

2. Két várost egy 195 km hosszú vasútvonal köt össze. Ezen a vonalon személyvonattal is és gyorsvonattal is el lehet jutni egyik városból a másikba. A személyvonat átlagsebessége 18 km/h-val kisebb a gyorsvonaténál, menetideje így 45 perccel több.

a) Határozza meg a vonatok átlagsebességét!

1805/3b

Ágoston osztálya kétnapos kirándulásra indul. Kulcsosházban szállnak meg egy éjszakára. A tanulók szállásdíja a résztvevők számától független, rögzített összeg. Az egy tanulóra jutó szállásköltség egy hiányzó esetén 120 Ft-tal, két hiányzó esetén pedig 250 Ft-tal lenne több, mint ha az egész osztály részt venne a kiránduláson.

b) Határozza meg az osztály létszámát és a teljes fizetendő szállásdíjat!

1805/9a

9. Egy városban bevezették a fizetős parkolást. A parkolási díj (a parkolás időtartamától függetlenül) napi 10 garas. A díjakból származó teljes bevétel a városi költségvetést illeti. Kezdetben nem alkalmaztak parkolóőröket.
Az új rendszer bevezetése után néhány héttel megállapították, hogy naponta kb. 15 000 autós parkolt a fizetős övezetben, és mintegy 25 százalékuk „bliccelt", azaz nem fizette meg a parkolási díjat. Emiatt a városvezetés – egy előzetes hatástanulmány alapján – parkolóőrök alkalmazása mellett döntött. Az őrök ellenőrzik a díj megfizetését, és annak elmaradása esetén megbírságolják a mulasztó autóst: minden bliccelőnek 150 garast kell fizetnie (ez az összeg tartalmazza a parkolási díjat és a bírságot is).
A tanulmány azt állítja, hogy a sűrűbb ellenőrzés növelni fogja a fizetési hajlandóságot: minden egyes újabb parkolóőr alkalmazásával a bliccelők aránya 0,5%-kal kisebb lesz (például 2 parkolóőr alkalmazása esetén 24%-ra csökken). A tanulmány számításai szerint egy parkolóőr egy nap alatt kb. 200 autót fog ellenőrizni, továbbá egy parkolóőr alkalmazásának napi költsége 330 garas, amelyet a befolyt parkolási díjakból és bírságokból kell kifizetni.
A tanulmány még a következőket feltételezte: naponta átlagosan 15 000 parkoló autó lesz, egy autót legfeljebb egy parkolóőr ellenőriz, és a bliccelők aránya a parkolóőrök által ellenőrzött autók között minden esetben ugyanannyi, mint az összes parkoló autó között.

a) A hatástanulmány becslései szerint mekkora lenne a város parkolási díjakból származó napi nettó (azaz a költségekkel csökkentett) bevétele 10 parkolóőr alkalmazása esetén?

2005/09

9. Egy városban a közösségi közlekedést kizárólag vonaljeggyel lehet igénybe venni, minden utazáshoz egy vonaljegyet kell váltani. A vonaljegy ára jelenleg 300 tallér. Az utazások száma naponta átlagosan 100 ezer. Ismert az is, hogy ennek kb. 10%-ában nem váltanak jegyet (bliccelnek).
A városi közlekedési társaság vezetői hatástanulmányt készíttettek a vonaljegy árának esetleges megváltoztatásáról. A vonaljegy árát 5 talléronként lehet emelni vagy csökkenteni. A hatástanulmány szerint a vonaljegy árának 5 talléros emelése várhatóan 1000-rel csökkenti a napi utazások számát, és 1 százalékponttal növeli a jegy nélküli utazások (bliccelések) arányát. (Tehát például 310 talléros jegyár esetén naponta 98 000 utazás lenne, és ennek 12%-a lenne bliccelés.) Ugyanez fordítva is igaz: a vonaljegy árának minden 5 talléros csökkentése 1000-rel növelné a napi utazások számát, és 1 százalékponttal csökkentené a bliccelések arányát. A tanulmány az alkalmazott modellben csak a 245 tallérnál drágább, de 455 tallérnál olcsóbb lehetséges jegyárakat vizsgálta.

a) Mekkora lenne a közlekedési társaság vonaljegyekből származó napi bevétele a hatástanulmány becslései alapján, ha 350 tallérra emelnék a vonaljegyek árát?

b) Hány talléros vonaljegy esetén lenne maximális a napi bevétel?

2010/02a

2. Egy továbbképzésen részt vevő csoport tagjai életkorának átlaga 28 év. Az öt legidősebb résztvevő életkorának átlaga 40 év, a többieké 25,6 év.

a) Hány nő és hány férfi vesz részt a továbbképzésen, ha 1,5-szer annyi nő van a csoportban, mint férfi?

2010/03a

3. Van néhány dobozunk és valahány érménk. Ha minden dobozba egy érmét teszünk, akkor m darab érme kimarad. Ha minden dobozba pontosan m db érmét akarunk tenni, akkor m dobozba nem jut érme ($m \neq 1$).

a) Hány érménk lehet, ha a dobozok száma 6?

2105/03a

3. Van egy részvénycsomagunk, amely 6600 Ft-os és 4800 Ft-os névértékű részvényeket tartalmaz. A részvényeink névértékének összege 131 400 Ft.
Ha a 4800 Ft-os névértékű részvényeink harmadát 6600 Ft-osra cserélnénk, akkor a névértékek összege 140 400 Ft-ra növekedne.

a) Hány darab részvényünk van az egyes fajtákból?

2110/02

2. Margiték autójában a fedélzeti számítógép kiszámítja, hogy az autó üzemanyagtartályában lévő benzin még hány kilométer megtételéhez elegendő. Nevezzük ezt *hátralévő távolság*nak. A számításhoz a gép a legutolsó tankolás óta mért átlagos fogyasztást veszi alapul, és úgy számol, hogy az autó a jövőben is ezzel az átlagfogyasztással fog haladni. A legutóbbi tankolás alkalmával teletöltötték az autó üzemanyagtartályát, így 45 liter benzin volt benne. A tankolás óta éppen 200 kilométert tettek meg a városban, ekkor az autó átlagfogyasztása 10 liter volt 100 kilométerenként.

a) Számítsa ki a városi autózás után a *hátralévő távolság*ot!

A 200 kilométeres városi autóhasználatot követően Margiték egynapos autós kirándulást tettek vidéken, ezalatt összesen 100 kilométert autóztak (újabb tankolás nélkül). A kirándulás végén a kijelző alapján 200 kilométerre elegendő benzin maradt, azaz ennyi lett a *hátralévő távolság*.

b) Mennyi volt az autó 100 km-re vonatkozó átlagfogyasztása a kirándulás során?

2110/04c

A konferencián 200 magyar, 70 angol és 130 német matematikus vesz részt. Az angolok életkorának átlaga 44 év, a németeké 48 év, az összes résztvevő életkorának átlaga 45,7 év.

c) Mennyi a magyar résztvevők életkorának átlaga?

2205/07a

7. Flóra kétfajta lisztből süt kenyeret. A kenyérhez a recept alapján 5 : 4 arányban kell búzaliszt és rozsliszt. Eredetileg 450 gramm búzalisztet és 400 gramm rozslisztet kevert össze, de további, összesen 500 gramm liszt hozzáadásával sikerült elérnie a recept által előírt arányt.

a) A hozzáadott 500 gramm lisztből hány gramm volt a búzaliszt?

2210/05b

Az A, B, C, D, E és F nemnegatív számokról a következőket tudjuk:
(1) $A = 6$ és $D = 8$;
(2) B számtani közepe A-nak és C-nek;
(3) F mértani közepe D-nek és E-nek;
(4) F 1-gyel nagyobb B-nél;
(5) E 2-vel nagyobb C-nél.

b) Határozza meg az ismeretlen számok értékét!

2405/06b

Dalma az 5250 méter hosszú margitszigeti futókörön edz. Egyik nap két kört futott: a második körben az átlagsebessége 3,5 km/h-val kisebb volt, mint az első körben. A teljes kétkörös futás átlagsebessége 12 km/h volt. (Az átlagsebesség a megtett út hosszának és az út megtételéhez szükséges időnek a hányadosa.)

b) Határozza meg Dalma átlagsebességét az első, illetve a második körben!

Teljes indukció

1905/09b

Az alábbi táblázatban egy végtelen szorzótábla részletét látjuk.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
…										…

A fehér, illetve szürke színű „L alakú” sávokban lévő számok összege:
$L_1 = 1$,
$L_2 = 2 + 4 + 2 = 8$,
$L_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27$, ...

b) Igazolja, hogy $L_n = n^3$.

1905/09c

c) Igazolja, hogy az első n pozitív köbszám összege

$$K_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2310/09

9. A 2, 4, 6, 8, 10 számok felhasználásával az összes lehetséges módon képezzük azokat a kéttényezős szorzatokat, amelyekben az első tényező kisebb, mint a második. Az így kapott szorzatokat összeadjuk.

a) Számítsa ki ezt az összeget!

Legyen k tetszőleges 1-nél nagyobb pozitív egész szám. Jelölje S_k azt az összeget, amelyet a következő eljárással kapunk: az 1, 2, 3, … , k számok (az első k db pozitív egész szám) felhasználásával az összes lehetséges módon képezzük azokat a kéttényezős szorzatokat, amelyekben az első tényező kisebb, mint a második, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

b) Igazolja, hogy $S_{k+1} = S_k + \frac{k(k+1)^2}{2}$.

c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy tetszőleges 1-nél nagyobb n egész szám esetén $S_n = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$.

Térgeometria

0510/7

6. **a)** A KLMN derékszögű trapéz alapjai KL= $2\sqrt{12}$ és MN= $3\sqrt{75}$ egység hosszúak, a derékszögű szár hossza $10\sqrt{2}$ egység. A trapézt megforgatjuk az alapokra merőleges LM szár egyenese körül.

Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát! (π két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon, és az eredményt is így adja meg!)

b) Az ABCD derékszögű érintőtrapéz AB és CD alapjai ($AB > CD$) hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges AD szárral vett érintési pontja negyedeli az AD szárat.

Számítsa ki a trapéz oldalainak hosszát!

0602/8b

8. Kartonpapírból kivágtunk egy 1,5 dm magasságú ABC szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húztunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyiktől ugyanakkora, 0,5 deciméternél kisebb x távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.

a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét x függvényében!

b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú, x magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágtuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait.
Mekkora x esetén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális?

0610/5ab

5. Egy szobor márvány talapzatát egy 12 dm élű kocka alakú kőből faragják. Minden csúcsnál a csúcshoz legközelebbi élnegyedelő pontokat tartalmazó sík mentén lecsiszolják a kockát.

a) A kész talapzatnak
- hány éle;
- hány csúcsa;
- hány lapja van?

b) A kész talapzatnak mekkora a felszíne?

0705/2c

2. Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 18 cm, a CA befogójának hossza 6 cm.

a) Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

A BC befogó egy P belső pontját összekötjük az A csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$.

b) Milyen hosszú a PB szakasz?

Állítsunk merőleges egyenest az ABC háromszög síkjára a C pontban! A merőleges egyenes D pontjára teljesül, hogy CD hossza 15 cm.

c) Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata?

0705/9

9. Az 1. ábra szerinti padlástér egy 6×6 méteres négyzet alapú gúla, ahol a tető csúcsa a négyzet középpontja felett 5 méter magasan van.

a) Milyen szöget zárnak be a tetősíkok a vízszintessel (padlássíkkal)?

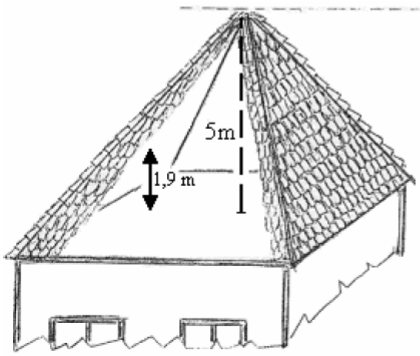
Hasznos alapterületnek számít a tetőtérben az a terület, amely fölött a (bel)magasság legalább 1,9 méter.

b) Mennyi lenne a tetőtér beépítésekor a hasznos alapterület?

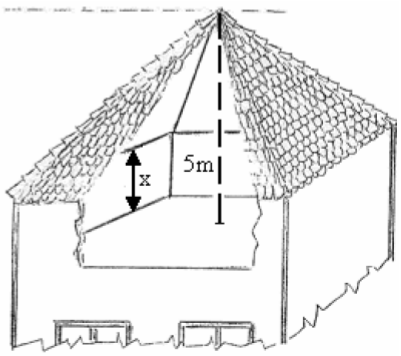
A tető cseréjekor a hasznos alapterület növelésének érdekében a ház oldalfalait egy ún. koszorúval kívánják magasítani. A ház teljes magassága – építészeti előírások miatt – nem növelhető, ezért a falak magasítása csak úgy lehetséges, ha a tető síkjának meredekségét csökkentik (2. ábra).

Jelölje x a koszorú magasságát és T a hasznos alapterületet.

c) Írja fel a $T(x)$ függvény hozzárendelési szabályát!



1. ábra



2. ábra

0810/8

8. Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet. A gúla alapéle 28 egység hosszú. Legyen F a CE oldalélnek, G pedig a DE oldalélnek a felezőpontja. Az $ABFG$ négyszög területe 504 területegység. Milyen hosszú a gúla oldaléle?

0905/1

1. Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 18 egység, testátlója $36 \cdot \sqrt{2}$ egység.

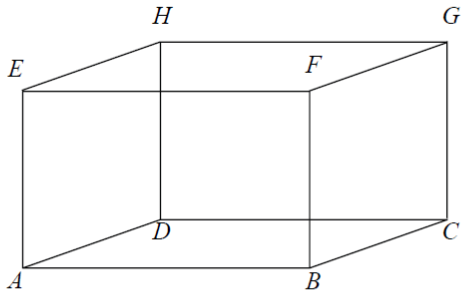
a) Mekkora szöget zár be a testátló az alaplap síkjával?

b) Hány területegység a hasáb felszíne? (A felszín mérőszámát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

c) Az alapél és a testátló hosszát - ebben a sorrendben – tekintsük egy mértani sorozat első és negyedik tagjának! Igazolja, hogy az alaplap átlójának hossza ennek a sorozatnak második tagja!

1010/3

3. Az *ABCDEFGH* téglatest *A* csúcsból induló élei: *AB=12; AD=6; AE*=8. Jelölje a *HG* él felezőpontját *P*.

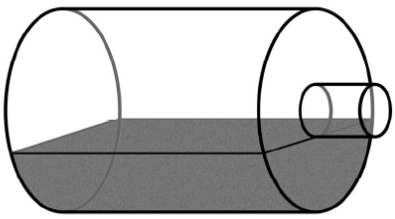


a) Számítsa ki az *ABCDP* gúla felszínét!

b) Mekkora szöget zár be az *ABCDP* gúla *ABP* lapjának síkja az *ABCD* lap síkjával?

1110/7a

7. Egy pillepalack alakja olyan forgáshenger, amelynek alapköre 8 cm átmérőjű. A palack fedőkörén található a folyadék kiöntésére szolgáló szintén forgáshenger alakú nyílás. A két hengernek közös a tengelye. A kiöntő nyílás alapkörének átmérője 2 cm. A palack magassága a kiöntő nyílás nélkül 30 cm.
A palack vízszintesen fekszik úgy, hogy annyi folyadék van benne, amennyi még éppen nem folyik ki a nyitott kiöntő nyíláson keresztül.



a) Hány deciliter folyadék van a palackban? (Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

1205/03

3. Egy forgáskúp nyílásszöge 90°, magassága 6 cm.

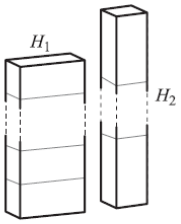
a) Számítsa ki a kúp térfogatát (cm^3-ben) és felszínét (cm^2-ben)!

b) A kúp alaplapjával párhuzamos síkkal kettévágjuk a kúpot. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata (cm^3-ben), ha a metsző sík átmegy a kúp beírt gömbjének középpontján?

Válaszait egészre kerekítve adja meg!

1205/05

5. Két egyenes hasábot építünk: H_1-et és H_2-t. Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágók, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alakú alaplapjukkal – az **ábra** szerint.



a) A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa: $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0{,}8$.

Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1-et és H_2-t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel?

1210/07

7. Egy üzemben 4000 cm^3-es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománcfestékkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.)

a) Számítsa ki, mekkora felületre kellene tűzálló zománcfesték egy olyan edény esetén, amelynek oldallapjai 6,4 cm magasak!

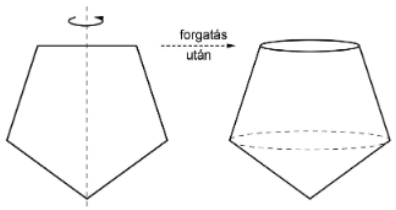
b) Az üzemben végül úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománcfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát!

1310/04b

b) Kata végül két olyan gyűrűt készíttetett, amelyek együttes tömege 16 gramm. (A megmaradó 14 karátos aranyötvözetet törtaranyként visszakapta.) Az elkészült két karikagyűrű tekinthető két lyukas hengernek, amelyek szélessége (a lyukas hengerek magassága) megegyezik. Az egyik gyűrű belső átmérője 17 mm, és mindenhol 1,5 mm vastag, a másik gyűrű belső átmérője 19,8 mm, vastagsága pedig mindenhol 1,6 mm.
Hány mm a gyűrűk szélessége, ha a készítésükhöz használt 14 karátos aranyötvözet sűrűsége $15\ \frac{g}{cm^3}$?

1305/03a

3. Egy cég a függőleges irány kijelölésére alkalmas, az építkezéseknél is gyakran használt „függőónt” gyárt, amelynek nehezéke egy acélból készült test. Ez a test egy 2 cm oldalhosszúságú szabályos ötszög egyik szimmetriatengelye körüli forgatásával származtatható (lásd az ábrán).



a) Hány cm^3 a nehezék térfogata?
Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

1410/02

2. Egy 2 cm sugarú, 20 cm széles festőhengerrel dolgozva egy fordulattal körülbelül 3 ml festéket viszünk fel a falra. (A festőhenger csúszás nélkül gördül a falon.)

a) Elegendő-e 4 liter falfestéket vásárolnunk, ha a szobánkban 40 m^2-nyi falfelületet egy rétegben, egyszer akarunk lefesteni?

b) Milyen magasan állna 4 liter falfesték a 16 cm átmérőjű, forgáshenger alakú festékes vödörben?
Válaszát cm-ben, egészre kerekítve adja meg!

1505/9

9. **a)** Egy kocka és egy gömb felszíne egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a gömb térfogata nagyobb, mint a kockáé!

Két fémkocka összeolvasztásával egy nagyobb kockát készítünk. Az egyik beolvasztott kocka egy élének hossza p, a másiké pedig q ($p > 0$, $q > 0$). (Feltesszük, hogy az összeolvasztással kapott kocka térfogata egyenlő a két összeolvasztott kocka térfogatának összegével.)

b) Igazolja, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne $6 \cdot \sqrt[3]{(p^3+q^3)^2}$.

c) Bizonyítsa be, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne kisebb, mint a két összeolvasztott kocka felszínének összege!

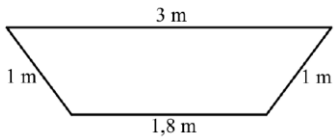
1510/05b

Egy háromoldalú egyenes hasáb alapéleinek hossza: $AB = 4$, $AC = BC = \sqrt{13}$, a hasáb magassága $2\sqrt{3}$ hosszúságú. Az AB alapél egyenesére illeszkedő S sík 30°-os szöget zár be a hasáb alaplapjával, és két részre vágja a hasábot.

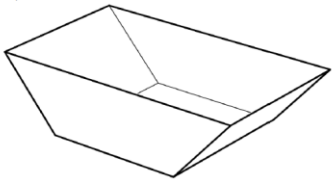
b) Számítsa ki a két rész térfogatának arányát!

1605/08b

A termelés során keletkezett hulladékot nagy méretű konténerbe gyűjtik, melyet minden nap végén kiürítenek és kitisztítanak.
A konténer egyenes hasáb alakú. A hasáb magassága 2 m, alaplapja húrtrapéz, melynek méretei az 1. ábrán láthatók. A konténert vízszintes felületen, az 1,8 m × 2 m-es (téglalap alakú) lapjára állítva helyezik el (lásd a 2. ábrát).



1. ábra



2. ábra

b) Számítsa ki a hasáb térfogatát!
Határozza meg, hogy milyen magasan áll a konténerben a tisztításához beletöltött 2,7 m^3 térfogatú folyadék!

1610/2

2. Ádámék kerti zuhanyozójának tartálya egy feketére festett, forgáshenger alakú, acéllemezből készült hordó. A henger átmérője 50 cm, magassága 80 cm.

a) Számítsa ki a hordó térfogatát és felszínét! (A lemez vastagsága a hordó méreteihez viszonyítva elhanyagolható.) A térfogatot egész literre, a felszínt egész négyzetdeciméterre kerekítve adja meg!

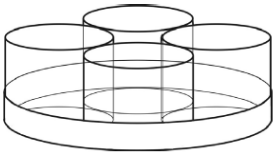
A megadott méretű hordót úgy szerelik fel, hogy a forgástengelye vízszintes legyen. Ebben a helyzetben – a beömlő nyílás miatt – csak 40 cm magasságig lehet feltölteni vízzel.



b) A teljes térfogatának hány százalékáig tölthető fel a vízszintes tengelyű tartály?

1705/3bc

Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcát is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is.



b) Igazolja, hogy a poharak alapkörének sugara nagyobb 4,1 cm-nél!

A pohár fala 2,5 mm vastag, belső magassága 11 cm.

c) Igaz-e, hogy a pohárba belefér 5 dl üdítő?

1705/6

6. Egy fémlemezből készült, forgáshenger alakú hordóban 200 liter víz fér el.

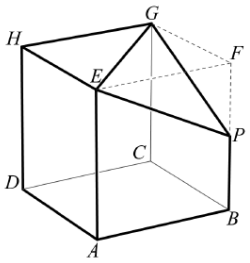
a) Mekkora területű fémlemez kell a 80 cm magas, **felül nyitott** hordó elkészítéséhez, ha a gyártása során 12%-nyi hulladék keletkezik?

Egy kisvállalkozásnál több különböző méretben is gyártanak 200 literes, forgáshenger alakú lemezhordókat.

b) Mekkora annak a 200 liter térfogatú, **felül nyitott** forgáshengernek a sugara és magassága, amelynek a legkisebb a felszíne?

1710/2

2. A 6 cm oldalélű tömör *ABCDEFGH* kocka *BF* élén megjelöltük az él *P* felezőpontját, majd a kockát kettévágtuk az *E*, *G*, *P* pontokra illeszkedő síkkal (az ábra szerint).



a) Mekkora a kettévágás során keletkezett nagyobbik test felszíne?

b) Mekkora szöget zár be a metsző sík és a kocka *EFGH* lapjának síkja?

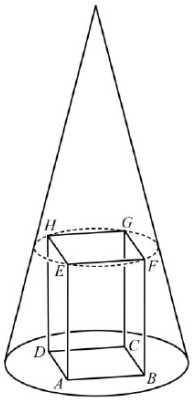
1710/7c

Egy másik akcióban a csokiszelet térfogatát 20%-kal megnövelték, de továbbra is változatlan áron adták. A csokiszelet téglatest alakú, az eredeti és a megnövelt szelet (matematikai értelemben) hasonló. Az akciós szelet 1 cm-rel hosszabb az eredeti csokiszeletnél.

c) Határozza meg az eredeti csokiszelet hosszúságát! Válaszát egész cm-re kerekítve adja meg!

180/08b

A négyzetes oszlop köré egy *P* csúcspontú forgáskúpot illesztünk úgy, hogy az *A*, *B*, *C*, *D* csúcsok a kúp alaplapjára, az *E*, *F*, *G*, *H* csúcsok pedig a kúp palástjára illeszkedjenek. (A kúp és a négyzetes oszlop tengelye egybeesik.) A kúp magassága 45 egység.



b) Számítsa ki a kúp felszínét!

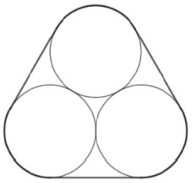
1905/04a

4. Egy bűvész két egyforma „dobótetraédert” használ az egyik mutatványához. A dobótetraéder alakja olyan szabályos háromoldalú gúla, amelynek alapéle 6 cm hosszú, az oldalélei pedig 30°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

a) Határozza meg a tetraéder térfogatát!

2010/04c

Dóri olyan pingponglabda-készletet vásárolt, amelynek dobozába három egyforma labda – az ábrán látható elrendezésben – szorosan belefér. A doboz hengeres test, melynek alaplapját három egybevágó körív és három egyenlő hosszúságú szakasz határolja. (Az ábrán a dobozt felülnézetből látjuk.)



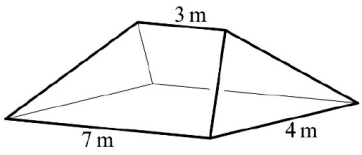
c) A doboz térfogatának hány százalékát tölti ki a három pingponglabda, ha a labdák átmérője 40 mm? (A doboz falvastagsága elhanyagolható.)

2010/07

7. Ádám balatoni telkén áll egy kis hétvégi ház. A ház felülnézete egy 7 m × 4 m-es téglalap. Ha esik az eső, akkor a tetőre lehulló csapadékot a tető négy oldalán körbefutó ereszcsatornák gyűjtik össze és vezetik be négy nagy, kezdetben üres (fedett) hordóba. A hordók forgáshenger alakúak, belső átmérőjük 40 cm, magasságuk 90 cm.
Egy nyári zivatar alkalmával 15 mm csapadék hullott a településen (ez azt jelenti, hogy minden vízszintes felületen 15 mm magasan állna az esővíz, ha nem szivárogna el). A zivatar közben a tetőre lehullott csapadék 95%-a összegyűlt a hordókban.

a) A zivatar után mindegyik hordóban ugyanolyan magasan állt a víz. Mekkora ez a magasság?

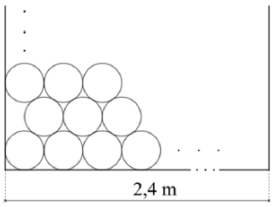
A ház cserépteteje elöregedett, cserélni kell. A tető felülete négy síkidomból áll. A háztető 7 méteres oldalaihoz két egybevágó húrtrapéz csatlakozik, amelyek síkja a vízszintessel egyaránt 30 fokos szöget zár be. A trapézok egymáshoz csatlakozó, rövidebb oldala 3 méter hosszú. A háztető 4 méteres oldalaihoz két egybevágó, egyenlő szárú háromszög csatlakozik.



b) Hány darab cserepet kell vásárolnia Ádámnak a tető újracserepezéséhez, ha a tetőfelület egy négyzetméterére 30 darabra van szükség, és a megvásárolt mennyiség 8%-a hulladék lesz?

2105/09ab

9. Egy teherautó raktere 2,4 méter széles, 2 méter magas és 7 méter hosszú. Ezzel a teherautóval kell olyan, méretre vágott farönköket szállítani, amelyek forgáshenger alakúak, 24 centiméter az átmérőjük, és 7 méter hosszúak.
A rakomány biztonsági okokból nem nyúlhat túl a raktéren egyik irányban sem. A szállítócég az ábrán látható stratégiával rendezi el a farönköket.



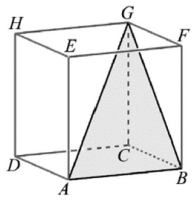
a) Mutassa meg, hogy legfeljebb 86 farönköt lehet így a raktérben elhelyezni!

b) A raktérnek hány százaléka marad üresen, ha 86 farönköt szállítanak?

2110/08c

[illegible] a csonkagúlában.)

Az ábrán látható *ABCDEFGH* kocka élhosszúsága 10 egység.



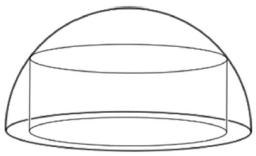
c) Számítsa ki az *ABG* háromszög beírt körének sugarát!

2110/09

9. Két forgáshenger alakú viaszgyertyánk van. Az egyik gyertya alapkörének sugara r, magassága h, a másik alapkörének sugara R, magassága szintén h. A két gyertyát összeolvasztjuk, majd a viaszból egy ugyancsak h magasságú, forgáshenger alakú gyertyát öntünk (r, h, $R > 0$).

a) Igazolja, hogy az így kapott gyertya alapkörének sugara legalább $\sqrt{2rR}$.
(Az öntés során fellépő anyagveszteségtől eltekinthetünk.)

Egy forgáshenger alakú tortát egy 15 cm sugarú, félgömb alakú védőbúra alatt helyezünk el. A torta a félgömb határoló körének síkján áll, és a torta fedőlapjának határoló köre a félgömbre illeszkedik (az ábra szerint).



b) Igazolja, hogy az m cm magasságú torta térfogata (köbcentiméterben mérve) $225\pi m - \pi m^3$. ($0 < m < 15$)

c) Igazolja, hogy a védőbúra alatt (a fent leírt módon) elhelyezhető maximális térfogatú torta térfogata kisebb, mint a félgömb térfogatának 60%-a!

2205/06c

Egy csonkakúp alapkörének sugara 14 cm, fedőkörének sugara 8 cm, alkotója 10 cm hosszú. Géza szeretné gyorsan megbecsülni a csonkakúp térfogatát, ezért azt egy henger térfogatával közelíti. A közelítő henger alapkörének sugara megegyezik a csonkakúp alap- és fedőköre sugarának számtani közepével, magassága pedig egyenlő a csonkakúp magasságával.

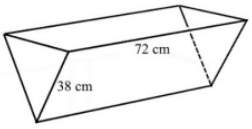
c) Határozza meg Géza közelítésének relatív hibáját! (Relatív hibának nevezzük a közelítő értéknek a pontos értéktől mért százalékos eltérését.)

2210/06

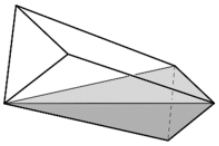
6. Egy ingatlanhirdetésben sík területen fekvő legelőt kínálnak eladásra. A legelő alakja konvex négyszög, ennek csúcsait jelölje A, B, C és D. A négyszög három oldala $AB = 126$ m, $BC = 65$ m, $CD = 80$ m, két szöge $ABC\sphericalangle = 122{,}5°$ és $ADC\sphericalangle = 90°$.
A legelőt 0,9 hektár területűnek hirdeti az eladó.

a) Hány százalékkal nagyobb a legelő valódi területe a meghirdetettnél?
(1 ha = 10 000 m^2)

Egy itatóvályú alakja háromszög alapú egyenes hasáb. Vízszintes helyzetében a vályú felül nyitott, a hasábnak ez a lapja párhuzamos a vízszintes talaj síkjával, a háromszög alakú lapok pedig a talaj síkjára merőlegesek (ld. az ábrát). A szabályos háromszög alakú lemezek oldalai 38 cm hosszúak, a két téglalap alakú oldallap pedig 38 cm × 72 cm-es.



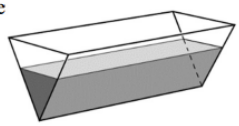
A vízszintes helyzetű vályú kezdetben tele van vízzel. A vályú egyik végét megemeljük, ezért a víz egy része kifolyik belőle. A vályúban ekkor a vízfelszín a bal oldali szabályos háromszög alsó csúcsától a jobb oldali szabályos háromszög felső éléig ér, ahogyan az ábra mutatja.



b) Igazolja, hogy ekkor a vályúban (egészre kerekítve) 15 liter víz van!

A vályút ezután visszafektetjük eredeti, vízszintes helyzetébe

c) Hány cm magasan áll a víz a vályúban ekkor?



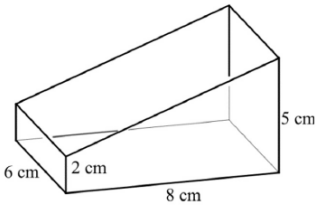
2210/08a

8. Egy téglatest egyik éle 4 dm, egy másik éle 2 dm hosszú. A téglatest térfogata 72 dm^3.

a) Határozza meg a téglatest felszínét!

2305/06a

6. Egy felül nyitott doboz vízszintes asztallapon áll. A dobozt három téglalap és két derékszögű trapéz határolja. A doboznak a vízszintes síkra illeszkedő lapja 8 cm × 6 cm méretű, két egymással szemközti függőleges síkú lapja pedig 6 cm × 5 cm, illetve 6 cm × 2 cm méretű téglalap.

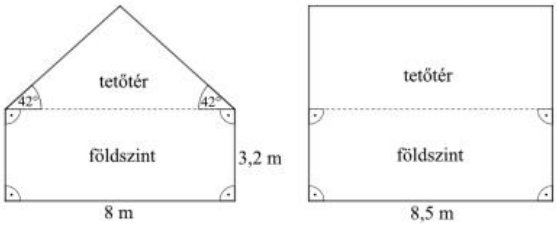


a) Számítsa ki a doboz testátlóinak hosszát!

2310/02

2. Egy családi ház egy téglatest alakú földszinti részből és a rá illeszkedő, háromoldalú egyenes hasáb alakú tetőtérből áll. A ház néhány méretét elölnézetben és oldalnézetben mutatja az alábbi ábra. (A falvastagságtól mindenütt eltekintünk.)


illusztráció



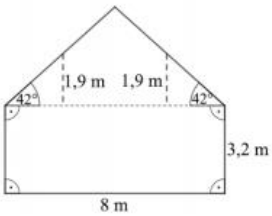
Az ábrán megadott méretek alapján számolva válaszoljon az alábbi kérdésekre!

a) A teljes tetőfelületet cseréppel fedik. Mekkora ez a felület? Válaszát m^2-ben, egészre kerekítve adja meg!

b) Hány köbméter a ház teljes térfogata (földszint és tetőtér összesen)?

A beépített tetőtér alapterületének csak az a része számít lakóterületnek, ahol a belmagasság legalább 1,9 méter.

c) Hány négyzetméter a ház teljes lakóterülete (a földszinti és tetőtérbeli lakóterület összesen)?



2405/07

7. A finom homokban az egyes gömb alakú homokszemek sugarát egységesen 0,1 mm-nek tekinthetjük. Egy 2 dl-es poharat teletöltünk finom homokkal. A homok (mivel a gömb alakú homokszemek nem töltik ki teljesen a teret) a pohár űrtartalmának 60%-át tölti ki.

a) Határozza meg, hány homokszem található a 2 dl-es pohárban! Válaszát millióra kerekítve adja meg!

Egy építkezéshez homokot rendelt Szabó úr. A homok megérkezett, és lerakás után a homokkupac jó közelítéssel egy 1,8 méter alkotójú forgáskúpnak tekinthető.

b) Határozza meg a homokkupac térfogatát, ha alapkörének átmérője 3,1 méter!

c) Határozza meg az 1,8 méter alkotójú forgáskúpok közül annak a sugarát és a magasságát, amelynek a térfogata maximális! Mekkora ez a maximális térfogat?

Trigonometrikus egyenlet

0505/7

7. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{\sin^2 x - 4\sin x + 4} + \sqrt{\sin^2 x + 4\sin x + 4} = \sqrt{\sin^2 x + 7\sin x + 12{,}25}$$

0602/1

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\cos 2x + 4\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$$

0610/3

3. Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes az alábbi összefüggés:

$$\sin\alpha : \sin\beta = \cos(\alpha+\gamma) : \cos(\beta+\gamma),$$

akkor a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű!

0905/5d

d) $\sin x - 1 = \sqrt{\lg(\cos^2 x - 1{,}5\cos x)}$

1405/05b

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$2\cos^3 x - 5\cos^2 x - 3\cos x = 0$

1410/01a

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2\sin x - 2\sin^2 x = \cos^2 x$

1505/01a

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin x - \cos^2 x = -1$

1705/01b

b) Oldja meg a $[-\pi; \pi]$ halmazon a $2\sin^2 x - \cos x = 2$ egyenletet!

2205/01b

b) $\frac{1}{4} \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{8} = 0$

2210/02a

2. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sin^2 x = 3\cos^2 x$

2305/01b

b) $4\sin^2 x - 16\cos^2 x = -1$

Trigonometrikus egyenlőtlenség

1605/05c

c) $2\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0$

1910/02a

2. Oldja meg az alábbi két egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $\cos x \geq \frac{1}{2}$ **b)** $\sqrt{\frac{x}{5} - 4} < 20$

Törtes egyenlőtlenség

1305/01

1. Jelölje A az $\frac{x+4}{x-3} \leq 0$ egyenlőtlenség **egész** megoldásainak a halmazát, B pedig az $|x+3| < 4$ egyenlőtlenség **egész** megoldásainak a halmazát.
Elemei felsorolásával adja meg az $A \cap B$, az $A \setminus B$ és az $A \cup B$ halmazt!

1805/2c

c) Oldja meg az $\frac{x-4}{x-6} \leq -1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Trigonometrikus egyenletrendszer

0510/5

5. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} \log_x\left(x^2y^3\right)+\log_y\left(x^3y\right)&=9 \\ \cos(x+y)+\cos(x-y)&=0 \end{aligned}\right\}$$

1105/9

9. Hány $(x; y)$ rendezett valós számpár megoldása van az alábbi egyenletrendszernek, ha x és y is a $[0\,;\,2\pi]$ zárt intervallum elemei?

$$\left.\begin{aligned} \sin x\cdot\cos y&=0 \\ \sin x+\sin^2 y&=\frac{1}{4} \end{aligned}\right\}$$

1110/4

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x > 0$, $x \neq 1$ és $y > 0$, $y \neq 1$.

$$\log_x y+\log_y x=2$$
$$\sin(2x+3y)+\sin(4x+y)=1$$

Valószínűségszámítás

0505/2

2. **a)** Döntse el, hogy az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Válaszát írja a táblázatba!

A: Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van.
B: Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros.
C: Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.
D: Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.

A	B	C	D

b) Ha valaki sohasem hallott a gráfokról, és mégis kitölti a fenti táblázatot, akkor mekkora valószínűséggel lesz helyes mind a négy válasza?

0505/5c

5. Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem?

b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt?

c) A Kiskakas étteremben minden vendég a fizetés után nyereménysorsoláson vehet részt. Két urnát tesznek elé, amelyekben golyócskák rejtik a város egy-egy éttermének nevét. Az *A* urnában a város összes vendéglőjének neve szerepel, mindegyik pontosan egyszer. A *B* urnában azoknak az éttermeknek a neve található – mindegyik pontosan egyszer –, amelyekben nincs felszolgálás. A vendég tetszés szerint húzhat egy golyót. Ha a húzott étteremben van reggelizési lehetőség, akkor a vendég egy heti ingyen reggelit nyer, ha nincs, nem nyer. Melyik urnából húzva nagyobb a nyerés valószínűsége?

0510/6cd

6. A következő táblázat egy 30 fős kilencedik osztály első félév végi matematikaosztályzatainak megoszlását mutatja.

Érdemjegy	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Tanulók száma	4	7	9	8	2

c) Véletlenszerűen kiválasztjuk az osztály egy tanulóját. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a tanuló legalább 3-ast kapott félév végén matematikából?

d) Két tanulót véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége annak, hogy érdemjegyeik összege osztható 3-mal?

0602/3

3. Egy automatából 100 Ft értékű ital kapható, s az automatába csak 100 Ft-os érme dobható be. Az italautomata gyakran hibásan működik.
160 kísérletet végezve azt tapasztaljuk, hogy

- az esetek 18,75%-ában az automata elnyeli a pénzt, és nem ad italt;
- 90 esetben visszaadja a 100 forintost, anélkül, hogy italt adna;
- 30 esetben italt is ad és a 100 Ft-os érmét is visszaadja;
- és csak a fennmaradó esetekben működik rendeltetésszerűen.

a) Mekkora annak az esélye az adatok alapján, hogy egy százast bedobva az automata rendeltetésszerűen fog működni?

b) Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy ingyen ihatunk, vagy annak, hogy ráfizetünk?

c) Várhatóan mennyi lesz a ráfizetése annak, aki 160-szor próbál vásárolni ennél az automatánál?

0602/7bc

b) A 36 kőből álló dominókészletből véletlenszerűen kiválasztottunk egy követ. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott kő két „térfelén" lévő pöttyök számának összege 8?

c) A 36 kőből álló dominókészletből ezúttal két követ választottunk ki véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két dominókő a játék szabályai szerint egymáshoz illeszthető? (Két dominókő összeilleszthető, ha van olyan „térfelük", amelyen a pöttyök száma ugyanannyi.)

0605/6ab

6. Egy közvélemény-kutató intézet felméréséből kiderült, hogy a felnőttek 4%-a színtévesztő. Véletlenszerűen kiválasztunk 8 felnőttet abból a népességből, melyre ez a felmérés vonatkozott. Mekkora a valószínűsége, hogy közöttük

a) pontosan két személy színtévesztő?

b) legalább két személy színtévesztő?

A két valószínűség értékét ezred pontossággal adja meg!

0610/4

4. Hét szabályos pénzérmét egyszerre feldobtunk, és feljegyeztük a fejek és írások számát.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy több fejet dobtunk, mint írást?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fejek és írások számának különbsége nagyobb háromnál?

0705/8

8. Két közvélemény-kutató cég mérte fel a felnőttek dohányzási szokásait. Az egyik cég a véletlenszerűen választott 800 fős mintában 255 rendszeres dohányost talált, a másik egy hasonlóan véletlenszerűen választott 2000 fős mintában 680-at.

a) Adja meg mindkét mintában a dohányosok relatív gyakoriságát!

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy ha a fenti 2000 fős mintából véletlenszerűen kiválasztunk 3 főt, akkor éppen 1 dohányos van közöttük?

c) Tegyük fel, hogy a lakosság 34%-a dohányos. Számolja ki annak a valószínűségét, hogy az országban 10 találomra kiválasztott felnőtt közül egy sem dohányos!

0710/4

4. Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk?

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy dobásnál a hat dobott szám összege legalább 34 lesz?

0805/4

4. Egy urnában csak piros, zöld és kék golyók vannak. A piros golyók száma 18.
Egy golyó kihúzása esetén annak a valószínűsége, hogy nem piros golyót (azaz zöldet vagy kéket) húzunk $\frac{1}{15}$-del kisebb, mint azé, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Annak a valószínűsége viszont, hogy kék vagy piros golyót húzunk $\frac{11}{10}$-szer nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy zöld vagy piros golyót húzunk.
Hány zöld és hány kék golyó van az urnában?

0805/7bc

7. Annának az IWIW-en 40 ismerőse van. (Az IWIW weboldalon lehetőség van az egymást ismerő emberek kapcsolatfelvételére. Ebben a feladatban minden ismeretséget kölcsönösnek tekintünk.)
Anna ismerőseinek mindegyike Anna többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer.

a) A szóba került 41 ember között összesen hány ismeretség áll fenn?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül véletlenszerűen választva kettőt, ők ismerik egymást?

c) Válasszunk most a 41 személy közül véletlenszerűen kettőt! Mennyi a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást?

0810/5b,c

5. Egy urnában 5 azonos méretű golyó van, 2 piros és 3 fehér. Egyesével, és mindegyik golyót azonos eséllyel húzzuk ki az urnából a bent levők közül.

a) Hány különböző sorrendben húzhatjuk ki az 5 golyót, ha a kihúzott golyót nem tesszük vissza, és az azonos színű golyók nem különböztethetők meg egymástól?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsó (ötödik) húzás előtt az urnában egy darab fehér golyó marad?

Az eredeti golyókat tartalmazó urnából hatszor húzunk úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hat húzásból legfeljebb kétszer húzunk piros golyót? (A valószínűséget három tizedesjegyre kerekített értékkel adja meg!)

0905/6c

Két kisiskolás a buszra várakozva beszélget. Áron azt mondja, hogy szeretné, ha a buszjegyen kilyukasztott három szám mindegyike prím lenne. Zita pedig azt reméli, hogy a számok összege 13 lesz.

c) Mekkora valószínűséggel teljesül Áron, illetve Zita kívánsága?

0910/5d

Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.

c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a **c)** pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű?

0910/7b

7. Egy matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A házigazda mindenkivel beszélt. Az azonos nemzetiségű vendégek egymást nem hívták, de a többiekkel mind beszéltek telefonon. Senki sem beszélt egy másik emberrel egynél többször, és minden beszélgetés pontosan két ember között zajlott.

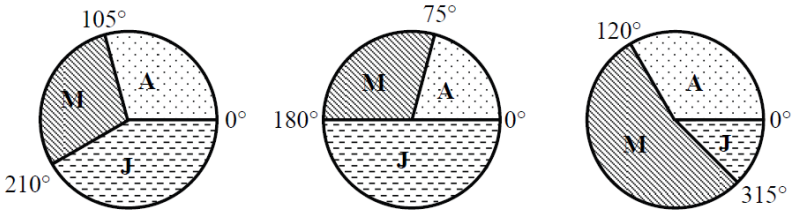
a) Hány telefonbeszélgetést bonyolított le egymás között a 8 matematikus csütörtökön?

A telefonbeszélgetéskor minden meghívott vendég megmondta, hogy mekkora valószínűséggel megy el a szombati vendégségbe. Mindannyian ugyanazt a valószínűséget mondták. A házigazda tudta, hogy a meghívottak egymástól függetlenül döntenek arról, hogy eljönnek-e. Kiszámolta, hogy 0,028 annak a valószínűsége, hogy mindannyian eljönnek.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy meghívott elmegy a vendégségbe? (Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

1005/4c

4. Egy könyvkiadó minden negyedévben összesíti, hogy három üzletében melyik szépirodalmi kiadványából fogyott a legtöbb. A legutóbbi összesítéskor mindhárom üzletben ugyanaz a három szerző volt a legnépszerűbb: Arany János, Márai Sándor és József Attila. Az alábbi kördiagramok szemléltetik, hogy az üzletekben milyen arányban adták el ezeknek a szerzőknek a műveit. A kördiagramok az első üzletből 408, a másodikból 432, a harmadikból 216 eladott könyv eloszlásait szemléltetik.



a) A kördiagramok adatai alapján töltse ki az alábbi táblázatot! Melyik szerző műveiből adták el a vizsgált időszakban a legtöbb könyvet?

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet	Összesített forgalom
Arany János				
Márai Sándor				
József Attila				
Összesen	408	432	216	

b) Készítsen olyan oszlopdiagramot a táblázat alapján, amely a vizsgált időszakban a szerzők szerinti összesített forgalmat szemlélteti!

A könyvkiadó a három üzletében minden eladott könyvhöz ad egy sorsjegyet. Ezek a sorsjegyek egy közös sorsoláson vesznek részt negyedévenként. A vizsgált időszakban azok a sorsjegyek vesznek részt a sorsoláson, amelyeket a fenti három szerző műveinek vásárlói kaptak. Két darab 50 ezer forintos könyvutalványt sorsolnak ki köztük.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a vizsgált időszak sorsolásán mind a két nyertes sorsjegyet Márai Sándor egy-egy könyvéhez adták, és mindkét könyvet a 2. üzletben vásárolták?
Válaszát három tizedesjegy pontossággal adja meg!

1005/8

8.

a) Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak, és mindenkinek 1-1 fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük hátlapjára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül rakta borítékba, bár mindenki kapott a levelében egy fényképet is.

a1) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a fényképet, amelyen a saját neve szerepel?

a2) Melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége:
– senki sem kapja azt a fényképet, amelyet Peti neki szánt;
vagy
– pontosan egyikük kap olyan fényképet, amelyen a saját neve szerepel?

b) Egy szabályos érme egyik oldalán a 6-os, a másikon pedig a 4-es számjegy látható. Az érmét négyszer egymás után feldobjuk, és a dobott számokat összeadjuk. Milyen értékeket kaphatunk összeg gyanánt?
Az egyes összegek dobásának mekkora a valószínűsége?

1010/8

8.

a) Két gyerek mindegyike 240 forintért vett kaparós sorsjegyet. Fémpénzzel fizettek (5; 10, 20, 50, 100 és 200 forintos érmékkel), és pontoson kiszámolták a fizetendő összeget. Hányféleképpen fizethetett Miki, ha ő 4 darab érmével fizetett, és hányféleképpen fizethet Karcsi, ha ő 5 darab érmével fizetett?
(A pénzérmék átadási sorrendjét nem vesszük figyelembe.)

A „bergengóc” lottóban kétszer húznak egy játéknapon. Bandi egy szelvénnyel játszik, tehát az adott játéknapon **mindkét** húzásnál nyerhet **ugyanazzal** a szelvénnyel.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak legalább egy telitalálata lesz, ha p annak a valószínűsége $(0 < p < 1)$, hogy egy szelvényen, egy húzás esetén telitalálata lesz?

Megváltoztatták a játékszabályokat: minden játéknapon **csak egyszer** húznak (más játékszabály nem változott). Bandi most **két** (nem feltétlenül különbözően kitöltött) szelvénnyel játszik.

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen valamelyik szelvényén?

d) A telitalálat szempontjából a **b)** vagy a **c)**-ben leírt játék kedvezőbb Bandi számára?

1105/4

4. Egy gyártósoron 8 darab gép dolgozik. A gépek mindegyike, egymástól függetlenül 0,05 valószínűséggel túlmelegszik a reggeli bekapcsoláskor. Ha a munkanap kezdetén 3 vagy több gép túlmelegszik, akkor az egész gyártósor leáll.
A 8 gép reggeli beindításakor bekövetkező túlmelegedések számát a binomiális eloszlással modellezzük.

a) Adja meg az eloszlás két paraméterét! Számítsa ki az eloszlás várható értékét!
b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a reggeli munkakezdéskor egyik gép sem melegszik túl?
c) Igazolja a modell alapján, hogy (négy tizedes jegyre kerekítve) 0,0058 annak a valószínűsége, hogy a gépek túlmelegedése miatt a gyártósoron leáll a termelés a munkanap kezdetekor!

1110/6

6. a) Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét:
A: a dobott pontok összege prím;
B: a dobott pontok összege osztható 3-mal.

b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni?

c) Az $ABCD$ négyzet csúcsai: $A(0;0)$, $B\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja?

1205/02

2. A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma $\frac{4}{3}$-szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapatnak kiosztott pontok száma összesen 139.

a) Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot!

Mind a négy csapatnak öt-öt tagja van. A vetélkedő után az induló csapatok tagjai között három egyforma értékű könyvutalványt sorsolnak ki (mindenki legfeljebb egy utalványt nyerhet).

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az utalványokat három olyan főiskolás nyeri, akik mindhárman más-más csapat tagjai?

1205/08

8. Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki egy asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle.

a) Az egyik felszolgáló az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 csorba szélű lesz a 10 pohár között!

A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, **visszatevéssel** kiválasztva közöttük pontosan 2 lesz selejtes!

A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik.

c) Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült?

1210/01

1. Egy új típusú sorsjegyből 5 millió darab készült, egy sorsjegy ára 200 Ft. Minden egyes sorsjegyen vagy a „Nyert” vagy a „Nem nyert” felirat található, és a nyertes sorsjegyen feltüntetik a nyertes szelvény tulajdonosa által felvehető összeget is. A gyártás során a mellékelt táblázat szerinti eloszlásban készült el az 5 millió sorsjegy.

sorsjegy (db)	nyeremény (Ft)
4	10 000 000
40	50 000
800	10 000
150 000	1 000
400 000	500
1 000 000	200
3 449 156	0

a) Ha minden sorsjegyet eladnának és a nyertesek minden nyereményt felvennének, akkor mekkora lenne a sorsjegyek eladásából származó bevétel és a kifizetett nyeremény különbözete?

b) Aki a kibocsátás után az első sorsjegyet megveszi, mekkora valószínűséggel nyer a sorsjegy áránál többet?

c) Számítsa ki, hogy ebben a szerencsejátékban az első sorsjegyet megvásárló személy nyereségének mennyi a várható értéke! (A nyereség várható értékének kiszámításához nemcsak a megnyerhető összeget, hanem a sorsjegy árát is figyelembe kell venni.)

1210/07c

c) Minőségellenőrzési statisztikák alapján ismert: 0,02 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott edény selejtes. Egy áruházláncnak szállított 50 darabos tételben mekkora valószínűséggel lesz pontosan 2 darab selejtes?

1305/8c

A gyárban (ahol ezeket az építőelemeket készítik) nagyon ügyelnek a pontosságra. Egymillió építőelemből átlagosan csupán 20 selejtes. András olyan készletet szeretne vásárolni, melyre igaz a következő állítás: *0,01-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a dobozban található építőelemek között van selejtes.*

c) Legfeljebb hány darabos készletet vásárolhat András?

1305/9

9. Egy dobozban 17 darab egyforma sugarú golyó van. A golyók közül 8 darab sárga és 9 darab zöld.

a) **Visszatevés nélkül** kihúzunk a dobozból 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 3 golyó egyszínű?

b) Ha úgy húzunk ki a dobozból 5 golyót, hogy a kivett golyót minden egyes húzás után **visszatesszük**, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 alkalommal sárga golyót, 2 alkalommal pedig zöld golyót húzunk?

c) A golyók meg vannak számozva 1-től 17-ig. Mennyi annak a valószínűsége, hogy **visszatevés nélkül** 3 golyót kihúzva a golyókon található számok összege osztható 3-mal?

Válaszait három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

1310/05

5. Egy iskola alapítványi bálján a korábban szokásos tombolahúzás helyett egy egyszerű lottóhúzást szerveznek. A szelvényt vásárolóknak az első tíz pozitív egész szám közül kell ötöt megjelölniük. Húzáskor öt számot sorsolnak ki (az egyszer már kihúzott számokat nem teszik vissza). Egy lottószelvény 200 Ft-ba kerül. Egy telitalálatos szelvénnyel 5000 Ft értékű, egy négytalálatos szelvénnyel 1000 Ft értékű, az alapítvány által vásárolt könyvutalványt lehet nyerni. Négynél kevesebb találatot elérő szelvénnyel nem lehet nyerni semmit.

a) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a legkisebb kihúzott szám a 3.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a számokat növekvő sorrendben húzzák ki?

Az *a*) és *b*) kérdésekre adott válaszait három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

c) Számolással igazolja, hogy (három tizedesjegyre kerekítve) a telitalálat valószínűsége 0,004, a négyes találat valószínűsége pedig 0,099.

d) Ha a húzás előtt 240 szelvényt adtak el, akkor mekkora az alapítvány lottóhúzásból származó hasznának várható értéke?

1305/06a

6. Egy üzemben olyan digitális műszert gyártanak, amely kétféle adat mérésére alkalmas: távolságot és szöget lehet vele meghatározni. A gyártósor meghibásodott, de ezt hosszabb ideig nem vették észre. Ezalatt sok mérőeszközt gyártottak, ám ezeknek csak a 93%-a adja meg hibátlanul a szöget, a 95%-a méri hibátlanul a távolságot, sőt a gyártott mérőeszközök 2%-a mindkét adatot hibásan határozza meg.

a) Az egyik minőségellenőr 20 darab műszert vizsgál meg **visszatevéses** mintavétellel a meghibásodási időszak alatt készült termékek közül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 darab hibásat talál közöttük? (Egy műszert hibásnak tekintünk, ha akár a szöget, akár a távolságot hibásan méri.)

1405/09b

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét első három napján vagy három különböző színű vagy három egyforma színű inget választ?
(Ha valamelyik nap viselt egy inget, azt utána már nem teszi vissza a szekrénybe.)

1410/03b

A cég ügyfélszolgálatának hosszú időszakra vonatkozó adataiból az derült ki, hogy átlagosan minden nyolcvanadik vásárló tér vissza később valamilyen minőségi kifogással.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy 100 vásárló közül legfeljebb kettőnek lesz később minőségi kifogása!

1410/09c

9. Éva egy 7×7-es táblázat bal felső mezőjétől kezdve, balról jobbra haladva, sorról sorra beírta egy számtani sorozat első 49 tagját úgy, hogy a tagok sorrendjét nem változtatta meg. (A sorozat 1. tagja a bal felső sarokba került, a 8. tag a második sor első mezőjébe, a 49. tag pedig a jobb alsó sarokban áll.)

		91				
				11		

a) Mennyi a táblázatba írt 49 szám összege, ha Éva a harmadik sor harmadik mezőjébe a 91-et, az ötödik sor ötödik mezőjébe pedig a 11-et írta?

Péter a táblázat minden sorából kiválasztja a számtani sorozat egy-egy tagját úgy, hogy a hét kiválasztott szám közül semelyik kettő ne legyen egy oszlopban.

b) Igazolja, hogy akárhogyan is választja ki Péter így a számokat, a hét szám összege minden esetben ugyanannyi lesz!

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a 91 és a 11 is a Péter által kiválasztott számok között lesz!

1505/6

6. Szétgurult 20 darab tojás az asztalon. Közülük 16 tojás ép maradt, de 4 tojásnak alig észrevehetően megrepedt a héja. Bori ezt nem vette észre, így visszarakosgatja a tojásokat a két tojástartóba. Először a sárga tartóba tesz tízet, majd a fehérbe a többit.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a 4 hibás tojás ugyanabba a tartóba kerül?

Csenge sokszor vásárol tojásokat a sarki üzletben. Megfigyelése szerint a tojások közül átlagosan minden ötvenedik törött. (Ezt úgy tekintjük, hogy a tojások mindegyike 0,02 valószínűséggel törött.)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 10 tojást tartalmazó dobozban egynél több törött tojást talál Csenge?

Egy csomagolóüzembe két termelő szállít tojásokat: az összes tojás 60%-a származik az A, 40%-a a B termelőtől. Az A termelő árujának 60%-a első osztályú, 40%-a másodosztályú, a B termelő árujának 30%-a első osztályú és 70%-a másodosztályú.
Az összes beszállított tojás közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és azt első osztályúnak találjuk.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy az A termelő árujából való a kiválasztott tojás?

1510/06d

Egy négypontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztott négy élt kiszínezünk zöldre. (Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a zöldre színezett élek a gráf egy négypontú körének élei!

1510/08

8. Dani sportlövészedzésre jár, ahol koronglövészetet tanul. Az első félév végén kiderült, hogy még elég bizonytalanul céloz: húsz lövésből átlagosan ötször találja el a repülő agyagkorongot. (Tekintsük ezt úgy, hogy minden lövésnél $\frac{5}{20}$ az esélye annak, hogy Dani találatot ér el.)

a) Mekkora annak az esélye az első félév végén, hogy nyolc egymás után leadott lövésből legalább háromszor célba talál?
Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

b) Az első félév végén legalább hány egymás után leadott lövés kell ahhoz, hogy Dani legalább 95%-os eséllyel legalább egyszer eltalálja a repülő korongot?

A rendszeres edzéseknek köszönhetően Dani eredményessége javult. A második félév végén már 0,72 volt annak a valószínűsége, hogy három egymás után leadott lövésből pontosan egy vagy pontosan két találatot ér el.

c) Számítsa ki, hogy a második félév végén mekkora valószínűséggel ér el találatot egy lövésből Dani!

1605/02

2. Egy dobozban 6 fehér és 4 piros golyó van. A 10 golyó közül véletlenszerűen kiválasztanak 5 golyót. Egy tanuló ezt állítja: *„Annak a valószínűsége, hogy az 5 kihúzott golyó között 2 fehér lesz, megegyezik annak a valószínűségével, hogy 4 fehér lesz közöttük."*

a) Mutassa meg, hogy ha a golyókat **visszatevés nélkül** húzzák ki, akkor a tanuló kijelentése igaz!

b) A valószínűségek kiszámításával mutassa meg, hogy ha az 5 golyót **visszatevéssel** húzzák ki, akkor a tanuló kijelentése nem igaz!

1605/06b

b) Az *A, B, C, D, E, F, G, H* pontok egy szabályos nyolcszög csúcsai. Megrajzoljuk a nyolcszög oldalait és átlóit. A megrajzolt szakaszok közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy mind a négy kiválasztott szakasz az *A* csúcsból indul ki!

1605/08a

8. Egy kisüzemi meggymagozó-adagoló gép 0,01 valószínűséggel nem távolítja el a magot a meggyből, mielőtt a meggyszemet az üvegbe teszi. A magozógépen áthaladt szemek közül 120-120 darab kerül egy-egy üvegbe.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott üvegben legalább 2 darab magozatlan szem van!

1610/4b

A Finom csokoládé csomagolásán az áll, hogy a tömege 100 g. A gyártó cég a saját megbízhatóságát így reklámozza: 99,9% annak a valószínűsége, hogy egy csokoládészelet tömege legalább 100 gramm.

b) Ha a reklám állítása igaz, akkor legalább hány szelet Finom csokoládét kell (véletlenszerűen) vásárolnunk ahhoz, hogy legalább 0,05 valószínűséggel legyen közöttük 100 grammnál kisebb tömegű is?
(Számításaiban a vásárlást modellezze visszatevéses mintavétellel!)

1610/6c

c) Határozza meg n értékét, ha $\frac{1}{26}$ annak a valószínűsége, hogy a három lány egymás mellett ül!

1705/7b

A biológiaórán egy kezdetben tízmilliós baktériumhalmaznak a környezethez való alkalmazkodását modellezik a tanulók. Egy szabályos dobókockával dobnak, és ha a dobás eredménye 1, 2 vagy 3, akkor egymillió baktérium elpusztul. Ha a dobás eredménye 4 vagy 5, akkor nem történik semmi. Ha a dobás eredménye 6, akkor újabb egymillió baktérium keletkezik. A dobást többször egymás után megismétlik.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy hét dobás után a baktériumok száma legfeljebb ötmillió lesz!

1705/9b

Egy fiókban három pár kesztyű van összekeveredve: az egyik pár fekete, a másik szürke, a harmadik piros. (A három pár kesztyű csak a színében különböző.)
A fiókból egyesével elkezdjük kihúzni a kesztyűket úgy, hogy húzás előtt nem nézzük meg a kesztyű színét, és a kihúzott kesztyűket nem tesszük vissza a fiókba. Addig folytatjuk a húzást, amíg lesz két azonos színű kesztyűnk.

b) Határozza meg annak a hat eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 kesztyű kihúzására lesz szükség, majd számítsa ki a húzások számának várható értékét!

1710/5c

Egy használt laptop-akkumulátorokat árusító üzletben a 25 azonos típusú akkumulátor töltéskapacitása 60% és 80% között van, de közülük csak 10-nek kisebb a töltéskapacitása 70%-nál. Egy vevő a 25 akkumulátor közül hármat vásárol meg.

c) Ha a három akkumulátort véletlenszerűen választja ki, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb az egyiknek lesz 70%-nál kisebb a töltéskapacitása?

1710/7ab

7. A Téglácska csokiszelet gyártója akciót indít: ha a szerencsés vásárló a csokiszelet csomagolásának belső oldalán a „Nyert” feliratot találja, akkor ezzel egy újabb szelet csokit nyert. A gyártó úgy reklámozza a termékét, hogy „minden ötödik csoki nyer”. (Ez úgy tekinthető, hogy minden egyes csoki 0,2 valószínűséggel nyer.)

a) Juli öt szelet csokoládét vásárol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az öt szelet csoki között legalább egy nyerő csoki lesz?

Pali is öt szelet csokoládét vásárolt, és végül hét szelet csokival tért haza a boltból, mert nyert még kettőt.

b) Vizsgálja meg, hogy az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége!
I. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között két nyerő csoki lesz, de a két nyereménycsoki egyike sem nyer.
II. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között egy nyerő csoki lesz, a nyereménycsoki nyer egy hetedik szelet csokit, de az már nem nyer.

1805/7ab

7. Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a 70 figura közül véletlenszerűen kiválasztott két figurát ugyanaz a lány készítette!

A Blanka által készített figurák 40%-a volt karácsonyfa, a Csenge által készített figuráknak 60%-a, a Dóri által készített figuráknak pedig 30%-a.
Az első vásárló a vásáron Blanka édesanyja volt; ő megvett egy véletlenszerűen kiválasztott karácsonyfa-figurát.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a figurát éppen Blanka készítette!

1805/8b

Az A, B, C, D, E, F kereskedőcégek mindegyike mind az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az A vagy a B cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet?

1810/06c

Egy matematika-vizsgafeladatban három állítás logikai értékét kell meghatározni (igaz vagy hamis). Három helyes válasz esetén 2, két helyes válasz esetén 1, kettőnél kevesebb helyes válasz esetén 0 pontot kap a vizsgázó. Béla tanult egy keveset, de bizonytalan a tudása: mindegyik kérdésnél 0,6 valószínűséggel találja el a helyes választ.

c) Számítsa ki annak a négy eseménynek a valószínűségét, hogy Béla sikeres tippjeinek száma 3, 2, 1, illetve 0, és határozza meg Béla pontszámának várható értékét!

1810/07ab

7. A római katonák az úgynevezett *taxillus*-szal játszottak „kockajátékot". (A taxillus a kecske vagy a juh térdkalácsából faragott csontocska; ld. a képen.)



Dobás után egy taxillus négy különböző oldalára eshetett. Jelölje ezt a négy különböző helyzetet *A*, *B*, *C* és *D*. Az egyes dobáskimenetelek nem voltak egyformán valószínűek: az *A*, illetve a *B* helyzet egyaránt $\frac{4}{10}$, a *C*, illetve a *D* helyzet pedig egyaránt $\frac{1}{10}$ valószínűséggel következett be.

A rómaiak általában négy taxillust dobtak fel egyszerre. A *Venus*-dobás volt az egyik legértékesebb, ekkor a négy csontocska mindegyike más-más oldalára esett.[1]

a) Mennyi a Venus-dobás valószínűsége?

b) Az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége?

I. Négy feldobott taxillus között lesz olyan, amelyik *C* helyzetben érkezik le.
II. Négy feldobott taxillus között pontosan egy érkezik le az *A* helyzetben.

1905/04b

A tetraéderrel 1-est, 2-est, 3-ast vagy 4-est lehet dobni (a dobás eredményének az alsó lapon lévő számot tekintjük). Az 1-es, a 2-es, illetve a 3-as dobásának valószínűsége egyenlő. A 4-es dobásának valószínűsége ötször akkora, mint az 1-es dobásé.

b) Ha a bűvész a két dobótetraédert egyszerre dobja fel, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 6 lesz?

1905/07c

A légitársaság vezetőségi értekezletén megállapították, hogy az 1-es számú járatukon legfeljebb 168 utasnak van hely, de minden alkalommal sokkal többen szeretnének jegyet váltani. Több év tapasztalatai szerint 0,032 annak a valószínűsége, hogy erre a járatra valaki megveszi a jegyet, de aztán valamilyen ok miatt mégsem jelenik meg a járat indulásánál. Emiatt a vezetőség úgy dönt, hogy erre a 168 fős járatra ezentúl 170 jegyet adnak el. Az érvényes szabályozás szerint a több jegy eladása miatt a járatról esetleg lemaradó utasoknak a légitársaság fejenként 600 euró kártérítést köteles fizetni.

c) Ha a vezetőség megállapításai helyesek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1-es számú járat egy indulásánál legfeljebb 168 utas jelenik meg, és mennyi a társaság által fizetendő kártérítés várható értéke a járat egy útját tekintve?

1905/07c

A légitársaság vezetőségi értekezletén megállapították, hogy az 1-es számú járatukon legfeljebb 168 utasnak van hely, de minden alkalommal sokkal többen szeretnének jegyet váltani. Több év tapasztalatai szerint 0,032 annak a valószínűsége, hogy erre a járatra valaki megveszi a jegyet, de aztán valamilyen ok miatt mégsem jelenik meg a járat indulásánál. Emiatt a vezetőség úgy dönt, hogy erre a 168 fős járatra ezentúl 170 jegyet adnak el. Az érvényes szabályozás szerint a több jegy eladása miatt a járatról esetleg lemaradó utasoknak a légitársaság fejenként 600 euró kártérítést köteles fizetni.

c) Ha a vezetőség megállapításai helyesek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1-es számú járat egy indulásánál legfeljebb 168 utas jelenik meg, és mennyi a társaság által fizetendő kártérítés várható értéke a járat egy útját tekintve?

1910/03b

A H halmaz az első 90 pozitív egész szám halmaza. H-ból véletlenszerűen kiválasztunk két különböző számot.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a két kiválasztott szám egy derékszögű háromszög (fokban mért) valamelyik két szöge!

1910/08c

A kétszemélyes társasjátékban minden játszma csak valamelyik játékos győzelmével végződhet, döntetlen nincs. Minden játszmában 1 pontot kap a győztes, a vesztes pedig 0 pontot.
Anna és Bori nagyon szereti ezt a társasjátékot, sok játszmát lejátszottak már. Ha egymás ellen játszanak, akkor Anna 0,4 valószínűséggel, Bori pedig 0,6 valószínűséggel nyer meg egy játszmát. Egyik alkalommal megállapodnak, hogy addig játszanak újabb játszmákat, amíg valamelyikük először éri el a 10 pontot (és így megnyeri a játékot).

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Bori legfeljebb 12 játszma után megnyeri a játékot? (Kezdéskor mindkettőjüknek 0 pontja van.)

1910/09b

Az évfolyamdolgozat egyik feladatában öt feleletválasztós kérdésben kellett négy-négy válaszlehetőség közül az egyetlen helyeset kiválasztani. Amikor Domonkos elolvasta a kérdéseket, akkor látta, hogy az első két kérdésre biztosan tudja a helyes választ (ezeket be is jelöli majd). A harmadik és a negyedik kérdésnél egy-egy válaszlehetőségről, az ötödik kérdésnél pedig két válaszlehetőségről tudta biztosan, hogy azok rosszak. Ezért úgy döntött, hogy az utolsó három kérdésnél tippelni fog: véletlenszerűen választ azon válaszlehetőségek közül, amelyekről nem tudja biztosan, hogy rosszak.

b) Határozza meg Domonkos helyes válaszai számának várható értékét!

2005/06b

Az ötöslottó-játékban az első 90 pozitív egész számból kell öt különbözőt megjelölni. A sorsoláson öt (különböző) nyerőszámot húznak ki. (Sem a megjelölés, sem a kihúzás sorrendje nem számít.)
Kati a 7, 9, 14, 64, 68 számokat jelölte meg. A sorsoláson az első három kihúzott nyerőszám a 7, a 9 és a 14 volt. Kati úgy gondolja, hogy most nagy esélye van legalább négy találatot elérni.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a hátralevő két nyerőszám közül Kati legalább az egyiket eltalálja!

2005/08bc

Egy másik étteremben 12 és 14 óra között 3900 Ft befizetéséért annyit eszik és iszik a vendég, amennyit szeretne.
A befizetendő összeget egy előzetes felmérés alapján állapították meg. A felmérés során minden vendég esetén összeadták az elfogyasztott étel és ital árát az adott fogyasztáshoz tartozó összes egyéb költséggel. Az összesített költségek alapján osztályokba sorolták a vendégeket aszerint, hogy az étteremnek hány forintjába kerültek.
Az alábbi táblázat mutatja a felmérés eredményét. A táblázat első sorában az osztályközepek láthatók.

fejenként ennyi Ft-ba került az étteremnek	1000	1900	2800	3600	4400	5200
a vendégek ennyi %-a	10	20	25	30	10	5

b) A felmérés eredményét felhasználva számítsa ki, hogy ennek az étteremnek 1000 vendég esetén mekkora a várható haszna!

c) A fenti táblázat értékeivel számolva mennyi a valószínűsége, hogy két (ebédre betérő) vendég együttes fogyasztása veszteséget jelent az étteremnek?
(A táblázatba foglalt információkat tekinthetjük úgy, hogy egy véletlenszerűen betérő vendég esetén pl. 0,25 annak a valószínűsége, hogy a vendég 2800 Ft-ba kerül az étteremnek.)

2010/03b

Egy dobozban több ezer érme van, amelyek 3%-a hibás. Az érmék közül véletlenszerűen kiválasztunk 80-at. (Az érmék nagy száma és az alacsony hibaszázalék miatt a kiválasztás visszatevéses mintavétellel is modellezhető.)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 hibás érme lesz a kiválasztott érmék között?

2010/08bc

Egy szerepjátékhoz használt dobókocka három lapján 3-as, két lapján 2-es, egy lapján 1-es szám van. A feldobott kocka mindegyik lapjára egyforma valószínűséggel esik.

b) Két ilyen dobókockával egyszerre dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 4 lesz?

Andi és Béla a következő játékot játsszák ezzel a dobókockával. Valamelyikük dob egyet a kockával. Ha a dobás eredménye 3, akkor Andi fizet Bélának n forintot ($n > 80$); ha a dobás eredménye 1, akkor Béla fizet $(n - 80)$ forintot Andinak; ha pedig a dobás eredménye 2, akkor is Béla fizet Andinak $2(n - 80)$ forintot.

c) Mennyit fizet Béla Andinak az 1-es dobása esetén, ha ez a játék igazságos, azaz mindkét játékos nyereményének várható értéke 0?

2105/05c

c) Tudjuk, hogy az A, B, C kijelentések mindegyike 0,6 valószínűséggel igaz és 0,4 valószínűséggel hamis. Ebben az esetben mennyi annak a valószínűsége, hogy az $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés igaz?

2105/08c

Az összes sorsjegy 5%-a nyerő. Kétféle nyeremény van: 2500 Ft-os és 50 000 Ft-os. A 2500 Ft-os nyerő sorsjegyből pontosan 24-szer annyi van, mint az 50 000 Ft-osból.

c) Töltse ki az alábbi táblázat üres mezőit, majd számítsa ki egy darab sorsjegy nyereményének várható értékét!

1 db sorsjegy nyereménye (Ft)	0	2500	50 000
nyeremény valószínűsége	0,95		

2105/09c

Kiderült, hogy a fák egy részében megtelepedtek a szúbogarak. Bármelyik fát kiválasztva 4% annak a valószínűsége, hogy van benne szú. Az egyik vásárló cég 50 fát vett.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb egy szúrágta fa kerül a rakományába?

2110/03b

b) A 8-as számrendszerben háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott szám a 9-es számrendszerben is háromjegyű?

2110/08b

8. Egy áruházláncban minden *Kocka* csokoládé vásárlásakor a csoki mellé ajándékba adnak egy „zsákbamacska” csomagot, amelyben egy kis fémkocka van. A fémkocka mindegyik lapja sárga vagy kék színűre van festve úgy, hogy mind a két színű lap előfordul.

a) Igazolja, hogy (színezés szerint) összesen 8-féle kocka van, ha a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek!

b) Dórinak 7 különböző színezésű kockája van, így már csak egy hiányzik a teljes készlethez, hogy abból nyakláncot készítsen magának. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 3 darab *Kocka* csokoládét vesz, akkor meglesz a teljes készlete?
(Feltételezhetjük, hogy mindegyik kockafajta ugyanakkora valószínűséggel fordul elő a csomagokban.)

2205/04bc

Egy dobozban 3 piros és 7 kék golyó található.

b) Kihúzunk a dobozból egymás után **két** golyót úgy, hogy az elsőként kihúzott golyót a húzás után **nem tesszük vissza**. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a kihúzott két golyó között lesz piros!

c) Kihúzunk a 10 golyó közül egymás után **három** golyót úgy, hogy a kihúzott golyót a következő húzás előtt mindig **visszatesszük**. Legyen az A esemény az, hogy a kihúzott három golyó közül pontosan kettő piros, a B esemény pedig az, hogy a kihúzott golyók között van piros.
Határozza meg a $P(A\,|\,B)$ valószínűséget!

2205/08c

András, Bori, Csaba és Dóra egy szabályos dobókockával dobnak egyet-egyet, és az nyer, aki a legnagyobb olyan számot dobta, amit a többiek nem dobtak (például 6, 6, 4, 1 dobások esetén a 4-est dobó játékos nyer). Ha nincs ilyen szám, akkor nem nyer senki.
Bori 5-öst dobott, a többiek ezután fognak dobni.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy Bori nyer?

2210/03bc

A részletesebb vizsgálatok szerint a cég által gyártott töltők 90 százaléka legalább 50 hónap élettartamú (ezt tekinthetjük úgy, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott töltő 0,9 valószínűséggel legalább 50 hónap élettartamú).

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy szakboltba kiszállított 20 darab töltő között legfeljebb kettő olyan található, amelynek az élettartama 50 hónapnál kevesebb?

Ismert az is, hogy 0,75 annak a valószínűsége, hogy öt darab véletlenszerűen kiválasztott töltő mindegyikének élettartama 55 hónapnál kevesebb.

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy darab véletlenszerűen kiválasztott töltő élettartama legalább 55 hónap?

2210/09bc

A sorsjegyek 40%-a kék, 60%-a zöld. A különböző színű sorsjegyekhez tartozó nyeremények arányát mutatja a táblázat (például az **összes kék** sorsjegynek a 35%-a tárgynyereményt nyer).

	kék	**zöld**
tárgynyereményt nyer	35%	40%
1000 Ft-os könyvutalványt nyer	20%	30%
5000 Ft-os könyvutalványt nyer	5%	–
nem nyer	40%	30%

Véletlenszerűen kiválasztunk egy sorsjegyet. Legyen az A esemény az, hogy ez a sorsjegy tárgynyereményt nyer, a B esemény pedig az, hogy ez a sorsjegy kék.

b) Igazolja, hogy $P(A) = 0{,}38$.
Számítsa ki a $P(B \mid A)$ feltételes valószínűséget!
Függetlenek-e az A és B események?

c) Határozza meg az egy kék sorsjegyre eső nyeremény várható értékét, ha a tárgynyereményt 500 Ft-os értéken vesszük figyelembe!

2305/05c

5. Pali és a testvére, Lilla együtt szeretnének filmet nézni. Három film közül választanak: az egyik a *Kocka*, a másik *A kör*, a harmadik pedig a *Képlet* című film. Pali ezek közül az egyik filmnek 1 pontot, egy másiknak 2 pontot, a harmadiknak pedig 3 pontot ad, majd (Palitól függetlenül) ugyanezt teszi Lilla is. A két pontszámot mindegyik film esetében összeadják, majd a **legkisebb** pontösszegű filmet nézik meg. Ha több ilyen film is van, akkor filmnézés helyett társasjátékoznak.

a) Melyik filmet néznék meg a testvérek, ha az alábbi táblázat szerint adnák a pontjaikat?

	Pali	Lilla
1 pont	A kör	Képlet
2 pont	Kocka	A kör
3 pont	Képlet	Kocka

b) Hányféleképpen oszthatják ki a pontokat a testvérek úgy, hogy mindhárom film pontösszege ugyanannyi legyen?

c) Ha Pali és Lilla is véletlenszerűen osztja ki a pontszámokat a filmek között, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy filmnézés lesz a pontozás eredménye?

2305/07ab

7. Egy gyár a beszállítójától 600 darab terméket rendelt. A gyár csak akkor veszi át a 600 darabot, ha egy **visszatevés nélküli** mintavétellel adódó 15 elemű mintában egyetlen hibás termék sincs.

a) Ha a 600 termék között 6 hibás van, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintavétel után a gyár átveszi a termékeket?

Egy cég reklámja szerint a termékeik legfeljebb 0,5%-a lehet hibás. A minőséget **visszatevéssel** előállított 15 elemű minta alapján ellenőrizték, amelyben 2-szer fordult elő hibás termék.

b) Tegyük fel, hogy a cég termékeinek pontosan 0,5%-a hibás!
Igazolja, hogy ekkor 1%-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a cég termékei közül visszatevéssel előállított 15 elemű mintában **legalább** 2-szer fordul elő hibás termék!

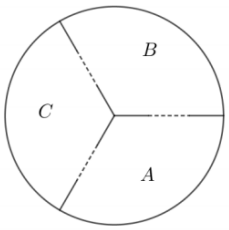
2310/06b

6. Egy hatfős baráti társaság, Attila, Boróka, Csaba, Dóra, Emil és Fanni három csapatot alkot. Mindhárom csapat 2 tagú, és mind a hatan pontosan egy csapatnak lesznek a tagjai.

a) Igazolja, hogy 15 különböző lehetőség van a három csapat kialakítására!
(Két lehetőség különböző, ha van olyan tag, akinek az egyik esetben más a csapattársa, mint a másikban.)

2310/08

8. Egy számítógépes játékban egy kör alakú tartomány az ábra szerint három résztartományra van felosztva (A, B, C). Bármely két tartomány között egy átjáró van (az ábrán szaggatott vonallal jelölve).
A tartományok közötti átjárók mindegyike a többitől függetlenül p valószínűséggel van nyitva ($0 < p < 1$). Egyik tartományból a másikba csak nyitott átjárón (vagy átjárókon) keresztül lehet eljutni.



Legyen az E_0 esemény az, hogy az A tartományból nem lehet másik tartományba eljutni.

a) Mutassa meg, hogy az E_0 esemény valószínűsége $1-2p+p^2$.

b) Hogyan kell megválasztani a p értékét úgy, hogy az E_0 esemény valószínűsége legfeljebb 0,01 legyen?

Legyen az E_1 esemény az, hogy az A tartományból pontosan egy másik tartományba lehet eljutni, az E_2 esemény pedig az, hogy az A tartományból mindkét másik tartományba el lehet jutni (nem feltétlenül közvetlenül).

c) Igazolja, hogy az E_1 esemény valószínűsége $2p-4p^2+2p^3$, az E_2 esemény valószínűsége pedig $3p^2-2p^3$.

d) Határozza meg a p valószínűség értékét úgy, hogy az E_1 esemény valószínűsége a lehető legnagyobb legyen, majd számítsa ki ekkor az E_1 esemény valószínűségét!

2405/03

3. A kockapóker játékot öt szabályos dobókockával játsszák. A játék célja, hogy a játékosok bizonyos számkombinációkat dobjanak ki a kockákkal.

Részletek a játékszabályból:

- A dobójátékos először mind az öt kockával dob.
- Ha nem elégedett az első dobás eredményével, akkor ezután felvehet tetszőleges számú kockát a lent lévő öt kockából, és azokkal másodszor is dobhat.

A *Sor* számkombináció esetén az öt kockán öt különböző, egymást követő szám szerepel.
A *Royal* számkombináció esetén mind az öt kockán ugyanaz a szám szerepel.
A *Full House* számkombináció esetén az öt kocka közül három kockán ugyanaz a szám szerepel, a maradék két kockán pedig szintén azonos, de az előzőtől eltérő szám szerepel (pl. 1-1-1-4-4).

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy játékos első dobása *Sor* lesz!

Egy játékos az első dobásával a 3-3-3-4-5 számokat dobta. A 3-asokat lent hagyja, a másik két kockával pedig másodszor is dob.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a játékos második dobása után kapott számkombináció *Full House* vagy *Royal* lesz!

Egy „cinkelt” (nem szabályos) dobókockával a 6-os dobás valószínűsége p. Ezzel a kockával kétszer dobunk egymás után. Tudjuk, hogy 0,64 annak a valószínűsége, hogy a két dobásból legalább az egyik 6-os.

c) Számítsa ki p értékét!

2405/09b

Egy kispályás labdarúgó-bajnokságban hat csapat körmérkőzést játszik egymással: mindegyik csapat játszik mindegyik másikkal egy-egy mérkőzést. A bajnokság megkezdése előtt a szervezők a mérkőzések közül kisorsolnak hármat, és ezeken a mérkőzéseken doppingellenőrzést tartanak.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy lesz olyan csapat, amelyik mindhárom kisorsolt mérkőzésen szerepel!

Vektorok

0910/3

3. Az **a** és **b** vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében:
$\mathbf{a}(\cos t\,;\,\sin t)$ és $\mathbf{b}(\sin^2 t\,;\,\cos^2 t)$.

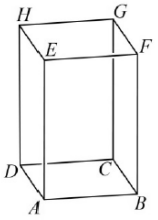
a) Adja meg az **a** és **b** vektorok koordinátáinak pontos értékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli!

b) Mekkora az **a** és **b** vektorok hajlásszöge $t=\frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!)

c) Határozza meg a t olyan valós értékeit, amelyek esetén az **a** és **b** vektorok merőlegesek egymásra!

1810/08a

8. Az $ABCDEFGH$ négyzetes oszlop AE, BF, CG, DH élei merőlegesek az $ABCD$ alaplapra. Az A csúcsból kiinduló három él hossza $AB = AD =$ $= 8$ egység, $AE = 15$ egység.



a) Számítsa ki az $\overrightarrow{EF}$ és $\overrightarrow{AH}$ vektorok skaláris szorzatát!