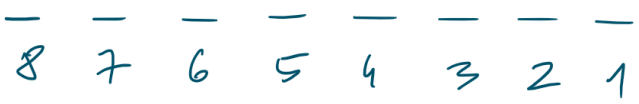
WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Die Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden in der Mittelschule meist mithilfe der **Kombinatorik** gelöst. Dabei spricht man von einer kombinatorischen Berechnung der Wahrscheinlichkeit.

Die folgenden Aufgaben behandeln die Grundprobleme der Kombinatorik.

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, acht verschiedenfarbige Kugeln der Reihe nach anzuordnen?

Auf den ersten Platz können wir 8 Kugeln legen. Ganz gleich, welche wir an die erste Stelle legen, auf die zweite können wir 7 Kugeln legen. Für die ersten beiden Plätze gibt es also 8·7 = 56 Möglichkeiten. Für den dritten Platz gibt es in allen 56 Fällen 6 Möglichkeiten usw. Somit können wir die 8 Kugeln auf 8·7·6·5·4·3·2·1 Weisen anordnen. Dies schreiben wir kurz als 8! (gesprochen „8 Fakultät“).



Allgemein, wenn wir nicht 8, sondern n Objekte anordnen wollen, beträgt die Anzahl der Möglichkeiten

$$n!$$

2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei rote, zwei blaue, zwei grüne und eine gelbe Kugel anzuordnen, wenn gleichfarbige Kugeln nicht unterschieden werden?

Zuerst unterscheiden wir alle 8 Kugeln, z. B. durch Nummerierung. Dann können sie auf 8! Weisen angeordnet werden. Danach fassen wir jene Anordnungen zusammen, die sich nur durch Vertauschung der roten Kugeln unterscheiden. Die 3 roten Kugeln können untereinander auf 3! Weisen getauscht werden, daher zählen wir diese als ein einziges Ergebnis. Ebenso verfahren wir mit den blauen und grünen Kugeln. Das Ergebnis laute

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$$

Allgemein gilt: Wenn n Objekte angeordnet werden und darunter $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_l$ gleiche sind, dann ist die Anzahl der Anordnungen

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots \cdots k_l!}$$

3. Aus acht verschiedenfarbigen Kugeln sollen drei Geschwister je eine Kugel erhalten. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Das erste Kind kann aus 8 Kugeln wählen, das zweite anschließend aus 7, das dritte aus 6. Ergebnis:

$$8 \cdot 7 \cdot 6.$$

Dies entspricht der Zahl der Variationen von 8 Elementen zu 3. Allgemein:

$$n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

4. Eine Klasse von 30 Schülern färbt sich für den Faschingsball die Haare in einer von acht Farben. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Jeder Schüler hat 8 Möglichkeiten. Da jeder unabhängig wählt, ergibt sich 8^{30}.

Allgemein: Wählt man k-mal aus n Objekten und ist Mehrfachwahl/Zurückegen erlaubt, so gibt es n^k Möglichkeiten. Also die Atwort:

$$n^k$$

5. Aus acht verschiedenen Farben sollen drei zum Ausmalen einer Karte gewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Wenn die Reihenfolge wichtig wäre, gäbe es $8 \cdot 7 \cdot 6$ Möglichkeiten. Da die Reihenfolge aber nicht zählt, teilen wir durch 3! und erhalten

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{\frac{8!}{5!}}{3!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!}$$

Dafür verwenden wir die Abkürzung $\binom{8}{3}$ und sprechen es aus als „8 über 3“.

Allgemein: Aus *n* verschiedenen Objekten *k* ohne Berücksichtigung der Reihenfolge:

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

6. In einer Konditorei gibt es vier Sorten Kuchen, es sollen sieben Stück gekauft werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Wenn wir die sieben Kuchen mit sieben Nullen kennzeichnen und die einzelnen Sorten mit Einsen trennen, dann benötigen wir dafür drei Einsen. Wenn wir zum Beispiel von den einzelnen Sorten der Reihe nach 2, 0, 3 und 2 Stück nehmen, können wir dies so darstellen:



Das heißt, die Aufgabe besteht darin, 7 Nullen und 3 Einsen in eine Reihenfolge zu bringen. Auf so viele Arten können wir das tun:

$$\frac{10!}{7! \cdot 3!} = \binom{7+3-1}{7}$$

Allgemein: Wählt man k Objekte aus n Sorten mit Wiederholung, so gilt

$$\frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Kombinatorische Wahrscheinlichkeit

Hat ein Zufallsexperiment n mögliche Ergebnisse und k davon sind günstig, so beträgt die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{k}{n}$$

Zum Beispiel, wenn wir mit zwei fairen Würfeln würfeln und die Frage lautet, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß die gewürfelte Summe 5 beträgt, dann…

Die Anzahl aller Fälle beträgt $n = 6 \cdot 6 = 36$

Die Anzahl der günstigen Fälle ist $k = 4$, denn die Möglichkeiten sind: 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1

Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die geworfene Summe 4 ist:

$$P = \frac{k}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Wichtige Regeln:

- „und“ bei unabhängigen Ereignissen → Wahrscheinlichkeiten multiplizieren
- „oder“ bei sich ausschließenden Ereignissen → Wahrscheinlichkeiten addieren
- Unmögliches Ereignis: $P(\emptyset) = 0$
- Sicheres Ereignis: $P(\Omega) = 1$
- Für disjunkte A und B: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Ergänzung: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, also $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Stichprobe ohne Zurücklegen

Beispiel: Aus einem ungarischen Kartenstapel (32 Karten) ziehen wir 6 Karten ohne Zurücklegen, Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei von ihnen rot sind?

Anzahl aller Fälle: $n = \binom{32}{6}$

Anzahl der günstigen Fälle: $k = \binom{8}{2} \cdot \binom{24}{4}$

$$P = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{24}{4}}{\binom{32}{6}}$$

Erwartungswert der Zahl roter Karten:

Wenn man 32 Karten zieht, werden 8 davon rot sein, also ein Viertel der Karten

Wenn man 8 Karten zieht, werden voraussichtlich 2 davon rot sein, also ein Viertel der Karten

Erwartungswert der Zahl roter Karten:

$$M(P) = E(P) = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$$

DEFINITION: Von einer Stichprobe ohne Zurücklegen spricht man, wenn aus den Elementen einer Menge zufällig einige ausgewählt werden, ohne dass die Reihenfolge berücksichtigt wird. Zum Beispiel: In einer Schachtel befinden sich zwanzig Kugeln, und man zieht fünf davon; bei der Fünfer-Lotterie werden aus 90 Zahlen fünf angekreuzt; bei der Ziehung der Fünfer-Lotterie werden aus 90 Zahlen fünf ausgelost. Wesentlich ist, dass jedes Element höchstens einmal ausgewählt werden kann. Es ist so, als würde man nacheinander Kugeln aus einem Sack ziehen, aber keine der gezogenen Kugeln vor dem nächsten Zug zurücklegen.

DEFINITION: Die Verteilung der Stichprobe ohne Zurücklegen nennt man hypergeometrische Verteilung.

SATZ: Bei der hypergeometrischen Verteilung sei N die Anzahl der Elemente, von denen M eine bestimmte Eigenschaft besitzen und N − M nicht. Es werden zufällig n Elemente ohne Zurücklegen ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass von den gezogenen n Elementen k die gegebene Eigenschaft besitzen, ist:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Der Erwartungswert der Trefferzahl ist

$$M(\xi) = n \cdot p = n \cdot \frac{M}{N}$$

Stichprobe mit Zurücklegen

Zum Beispiel ziehen wir aus einem ungarischen Kartenspiel sechs Karten mit Zurücklegen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei davon rot sind?

$n = 32^6$

$k = \binom{6}{2} 8^2 \cdot 24^4$

$$P = \frac{\binom{6}{2} \cdot 8^2 \cdot 24^4}{32^6} = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{8}{32}\right)^2 \cdot \left(\frac{24}{32}\right)^4$$

Erwartungswert der Zahl roter Karten:

Wenn man 32 Karten zieht, werden 8 davon rot sein, also ein Viertel der Karten

Wenn man 8 Karten zieht, werden voraussichtlich 2 davon rot sein, also ein Viertel der Karten

Erwartungswert der Zahl roter Karten:

$$M(P) = E(P) = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$$

DEFINITION: Von einer Stichprobe mit Zurücklegen spricht man, wenn aus den Elementen einer Menge mehrmals zufällig ein Element ausgewählt wird und jedes Element bei jeder Auswahl erneut gewählt werden kann. Das Modell wird anschaulich beschrieben, wenn man mehrfach Kugeln aus einem Sack zieht, wobei vor jedem Zug die zuvor gezogene Kugel zurückgelegt wird. Zum Beispiel ist dies der Fall, wenn man fünfmal hintereinander mit einem normalen Würfel würfelt und den gewürfelten Wert notiert; ähnlich ist es beim Toto, bei dem für jedes Spiel dieselben drei verschiedenen Tipps abgegeben werden können.

DEFINITION: Die Binomialverteilung beschreibt Experimente mit zwei möglichen Ausgängen, bei denen das Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit p eintritt und mit $1-p$ nicht.

SATZ: Bei n Wiederholungen ist die Wahrscheinlichkeit, daß Ereignis A genau k-mal eintritt, durch die binomische Formel gegeben.

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

SATZ: Bei der binomialen Verteilung beträgt der Erwartungswert der Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft A:

$$M(\xi) = n \cdot p = n \cdot \frac{M}{N}$$